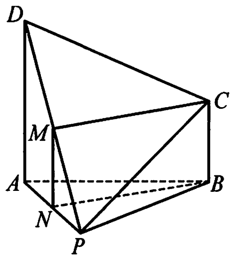
8. (1) 如图，取 PA 的中点 N，连接 MN，BN.



（第 8 题）

因为 M 为 PD 的中点，

所以 $MN/\!/DA$，$MN=\frac{1}{2}DA$.

因为 $DA\perp$平面 PAB，$CB\perp$平面 PAB，

所以 $CB/\!/DA$，又 $DA=2CB$，所以 $MN/\!/CB$，且 $MN=CB$，于是四边形 $MNBC$ 是平行四边形，从而 $CM/\!/BN$.

因为 $CM\not\subset$平面 PAB，$BN\subset$平面 PAB，

所以 $CM/\!/$平面 PAB.

(2) 因为 $BA=BP$，N 为 PA 的中点，

所以 $BN\perp PA$.

因为 $DA\perp$平面 PAB，$BN\subset$平面 PAB，

所以 $BN\perp DA$.

因为 $CM/\!/BN$，所以 $CM\perp PA$，$CM\perp DA$.

因为 $PA\subset$平面 PAD，$DA\subset$平面 PAD，$PA\cap DA=A$，所以 $CM\perp$平面 PAD.

又 $CM\subset$平面 PCD，所以平面 $PCD\perp$平面 PAD.

9. (1) 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

因为圆 C 经过点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，且圆心在直线 l：$x-y-1=0$ 上，

所以 $\begin{cases}1+9+D+3E+F=0,\\16+4+4D+2E+F=0,\\-\frac{D}{2}+\frac{E}{2}-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=-4,\\E=-2,\\F=0,\end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$.

(2) 由(1)知，圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

由题意知 $S=2S_{\triangle PMC}=PM\times MC=\sqrt{PC^2-5}\times\sqrt{5}$.

所以当 PC 最小时，S 最小.

因为圆 D：$x^2+y^2+8x-2y+16=0$，

所以 $D(-4,1)$，半径为 1.

因为 $C(2,1)$，所以两个圆的圆心距 $DC=6$.

因为点 $P\in$圆 D，且圆 D 的半径为 1，

所以 $PC_{\min}=6-1=5$，

所以 $S_{\min}=\sqrt{5^2-5}\times\sqrt{5}=10$，

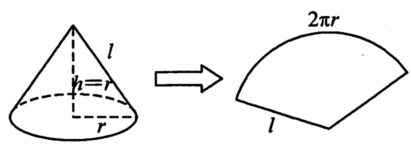
此时直线 MC：$y=1$，从而 $P(-3,1)$.

训 练 五

1. -7 【解析】因为 $l_1/\!/l_2$，所以 $(3+m)(5+m)-8=0$，解得 $m=-1$ 或 -7. 当 $m=-1$ 时，l_1 与 l_2 重合，不符合题意；当 $m=-7$ 时，符合题意. 所以 $m=-7$.

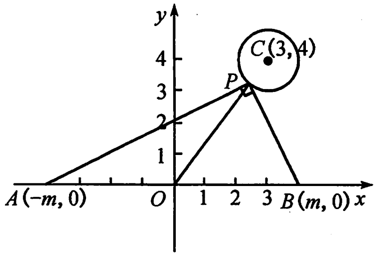
2. 2 【解析】由题意知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=4$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=4$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=2$.

3. $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ 【解析】不妨设 $V_1=27$，$V_2=9\pi$，故 $V_1=a^3=27$，即 $a=3$，所以 $S_1=6a^2=54$. 如图，$V_2=\frac{1}{3}h\times\pi r^2=\frac{1}{3}\pi r^3=9\pi$，即 $r=3$，所以 $l=\sqrt{2}r$，即 $S_2=\frac{1}{2}l\times2\pi r=\sqrt{2}\pi r^2=9\sqrt{2}\pi$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{54}{9\sqrt{2}\pi}=\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$.



（第 3 题）

4. 6 【解析】根据题意，画出示意图，如图所示，则圆心 C 的坐标为 $(3,4)$，半径 $r=1$，且 $AB=2m$，因为 $\angle APB=90°$，连接 OP，易知 $OP=\frac{1}{2}AB=m$. 要求 m 的最大值，即求圆 C 上的点 P 到原点 O 的最大距离. 因为 $OC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以 $OP_{\max}=OC+r=6$，即 m 的最大值为 6.



（第4题）

5. Π_9 【解析】$\Pi_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=(a_1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$，由 $a_1=2$，$q=-2$，得 $\Pi_8=2^8(-2)^{28}=2^{36}$，$\Pi_9=2^9(-2)^{36}=2^{45}$，$\Pi_{10}=2^{10}\cdot(-2)^{45}=-2^{55}$，$\Pi_{11}=2^{11}(-2)^{55}=-2^{66}$.故 Π_9 最大.

6. $\left[-2,\frac{1}{4}\right)$ 【解析】令 $f(x)=x^2-|x+a|+2a$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+a,x\geqslant -a,\\x^2+x+3a,x<-a.\end{cases}$ 因为 $A\neq\varnothing$，所以方程 $x^2-|x+a|+2a=0$ 有两个不等的实数根.因为 $A\subseteq B$，所以方程的根小于或等于 2.当 $x\geqslant -a$ 时，方程为 $x^2-x+a=0$，对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}$，则 $\Delta=1-4a>0$，得 $a<\frac{1}{4}$，$f(2)=2+a\geqslant 0$，得 $a\geqslant -2$，所以 $a\in\left[-2,\frac{1}{4}\right)$.当 $x<-a$ 时，方程为 $x^2+x+3a=0$，对称轴方程为 $x=-\frac{1}{2}$，则 $\Delta=1-12a>0$，得 $a<\frac{1}{12}$，$f(2)=6+3a\geqslant 0$，得 $a\geqslant -2$，所以 $a\in\left[-2,\frac{1}{12}\right)$.综上，$a$ 的取值范围为 $\left[-2,\frac{1}{4}\right)$.

7. (1) 因为 $AD:AB=2:3$，
所以可设 $AD=2k$，$AB=3k$.
又 $BD=\sqrt{7}$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，
所以由余弦定理，得 $(\sqrt{7})^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times 3k\times 2k\cos\frac{\pi}{3}$，解得 $k=1$，所以 $AD=2$，$AB=3$，
所以

$$\sin\angle ABD=\frac{AD\sin\angle DAB}{BD}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(2) 因为 $AB\perp BC$，
所以 $\cos\angle DBC=\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{21}}{7}$，
所以 $\sin\angle DBC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，
所以 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，

所以 $CD=\dfrac{\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. (1) 设 BD 与 AC 交于点 O，连接 OE，OH.
因为 O，H 分别为 AC，BC 的中点，
所以 $OH/\!/AB$，且 $OH=\frac{1}{2}AB$.
又因为 $EF/\!/AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$，
所以 $OH \underline{/\!/} EF$，
所以四边形 $OEFH$ 为平行四边形，
所以 $FH/\!/OE$.
又因为 $FH\not\subset$ 平面 BDE，$OE\subset$ 平面 BDE，
所以 $FH/\!/$ 平面 BDE.
(2) 因为 $EF/\!/AB$，$EF\perp FB$，所以 $AB\perp FB$.
又因为 $AB\perp BC$，$FB\cap BC=B$，FB，$BC\subset$ 平面 BCF，所以 $AB\perp$ 平面 BCF.
因为 $FH\subset$ 平面 BCF，所以 $FH\perp AB$.
又 $FH\perp BC$，$BC\cap AB=B$，BC，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，
所以 $FH\perp$ 平面 $ABCD$.
又因为 $FH/\!/OE$，所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，
因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OE\perp AC$.
又 $AC\perp BD$，$BD\cap OE=O$，BD，$OE\subset$ 平面 BDE，
所以 $AC\perp$ 平面 BDE.

9. 设降价前的收益为 y_1 元，降价后的收益为 y_2 元，
则 $y_1=16a$，
$y_2=\left(a+\frac{ka}{x-20}\right)(x-14)=a\left(1+\frac{k}{x-20}\right)(x-14)$.
(1) 当 $k=2$ 时，为了保证收益不减少，
则 $a\left(1+\frac{2}{x-20}\right)(x-14)\geqslant 16a$，
即 $x^2-48x+572\geqslant 0$，
解得 $x\leqslant 22$ 或 $x\geqslant 26$.

因为 $x\in[23,28]$，所以 x 的最小值为 26.

(2) 由题意知，$a\left(1+\frac{k}{x-20}\right)(x-14)\geqslant 16a\left(1+\frac{1}{24}\right)$ 对任意的 $x\in[23,28]$ 都成立，

即 $k\geqslant(x-20)\left[\frac{50}{3(x-14)}-1\right]=\frac{68}{3}-\left[\frac{100}{x-14}+(x-14)\right]$ 对任意的 $x\in[23,28]$ 都成立.

因为 $y=\frac{100}{x-14}+(x-14)\geqslant 2\sqrt{\frac{100}{x-14}\cdot(x-14)}=20$，当且仅当 $x=24\in[23,28]$ 时取等号，所以 $k\geqslant\frac{8}{3}$，

故 k 的取值范围为 $\left[\frac{8}{3},3\right)$.

答：(1) 当 $k=2$ 时，为了保证销售该商品的收益不会减少，x 的最小值为 26；

(2) 当都能保证销售该商品的收益增长率不低于 $\frac{1}{24}$ 时，k 的取值范围为 $\left[\frac{8}{3},3\right)$.

训 练 六

1. $(0,1]$ 【解析】函数的定义域需满足 $\begin{cases}1+\frac{1}{x}>0,\\1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<x\leqslant 1$，故原函数的定义域为 $(0,1]$.

2. $\frac{2}{3}$ 【解析】从 4 种颜色的花中任选 2 种种在一个花坛中，余下 2 种种在另一个花坛中，有 6 种种法，其中红色和紫色的花在一个花坛的种法有 2 种，故所求概率 $P=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$.

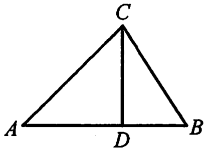
3. $\sqrt{5}$ 【解析】由题意可知，$\frac{b}{a}=2$，即 $b=2a$，所以 $c^2-a^2=4a^2$，解得 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=5$，从而 $e=\sqrt{5}$.

4. $4+2\sqrt{2}$ 【解析】设 $P(2\cos\theta+1,2\sin\theta+1)$，则 $\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta+1,2\sin\theta+1)$，$\overrightarrow{CP}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CP}=4\cos^2\theta+2\cos\theta+4\sin^2\theta+2\sin\theta=4+2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，当 $\theta-\frac{\pi}{4}=2k\pi$，即 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 取得最大值 $4+2\sqrt{2}$.

5. 1 【解析】因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 D 为 BC 中点，所以 $AD\perp BC$. 又因为 $BB_1\perp$ 平面 ABC，$AD\subset$ 平面 ABC，所以 $BB_1\perp AD$. 因为 $BB_1\cap BC=B$，BB_1，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 AD 是三棱锥 $A-B_1DC_1$ 的高，所以 $V_{A-B_1DC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

6. $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 【解析】方法一：原式可化为 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B\cos A-\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(B-A)}{\sin A\sin B}$，由 $b^2-a^2=ac$，得 $b^2=a^2+ac=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $a=c-2a\cos B$. 由正弦定理得 $\sin A=\sin C-2\sin A\cos B$，即 $\sin A=\sin(A+B)-2\sin A\cdot\cos B=\sin(B-A)$. 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A=B-A$，即 $B=2A$，故 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\sin B}$. 在锐角三角形 ABC 中，易知 $\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B<1$，故 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

方法二：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D. 因为 $b^2-a^2=(AD^2+CD^2)-(BD^2+CD^2)=AD^2-BD^2=(AD+BD)(AD-BD)=c(AD-BD)=ac$，所以 $AD-BD=a$. 又 $AD+BD=c$，所以 $BD=\frac{c-a}{2}$，则 $c>a$，即 $\frac{c}{a}>1$. 在锐角三角形 ABC 中，有 $b^2+a^2>c^2$，则 $a^2+a^2+ac>c^2$，即 $\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-2<0$，解得 $-1<\frac{c}{a}<2$，因此 $1<\frac{c}{a}<2$，故 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}=\frac{AD-BD}{CD}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\left(\frac{c-a}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{a}-1\right)^2}}\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.



（第 6 题）

7. (1) 因为函数 $f(x)=(a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

即 $(a+2\cos^2 x)\cos(-2x+\theta)=-(a+2\cos^2 x)\cdot\cos(2x+\theta)$.

因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\cos(-2x+\theta)=-\cos(2x+\theta)$，$\cos 2x\cos\theta=0$，$\cos\theta=0$.

又因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $\left(a+2\cos^2\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0$，解得 $a=-1$.

(2) 由(1)得 $f(x)=(-1+2\cos^2 x)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x(-\sin 2x)=-\frac{1}{2}\sin 4x$，所以由 $f\left(\frac{\alpha}{4}\right)=-\frac{2}{5}$，可得 $-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\frac{2}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$. 又因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

因此 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

8. (1) 由题意知 $\begin{cases}6-a=b\mu,\\4-b=a\lambda,\end{cases}$

解得 $a=\frac{4\mu-6}{\mu\lambda-1}$，$b=\frac{6\lambda-4}{\mu\lambda-1}$.

(2) 设可升降舞台的面积为

$S=6\times4-2\left[\left(\frac{6\lambda-4}{\mu\lambda-1}\right)^2\mu+\left(\frac{4\mu-6}{\mu\lambda-1}\right)^2\lambda\right]$.

因为 $\lambda\mu=9$，

化简整理得

$$S=6\times4-2\left[\left(\frac{6\lambda-4}{\mu\lambda-1}\right)^2\mu+\left(\frac{4\mu-6}{\mu\lambda-1}\right)^2\lambda\right]$$

$$=24-\frac{90\lambda+40\mu-216}{8}$$

$$=24-\frac{\frac{810}{\mu}+40\mu-216}{8}$$

当且仅当 $\frac{810}{\mu}=40\mu$，即 $\mu=\frac{9}{2}$ 时，S 取得最大值 6，此时 $\lambda=2$.

答：当 $\mu=\frac{9}{2}$，$\lambda=2$ 时可升降舞台的面积最大，且最大面积为 6 m^2.

9. (1) 由题意知 $a=2$，$b=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

又 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 设 $P(x_0,y_0)(x_0<0,y_0<0)$，则 $x_0^2+4y_0^2=4$.

又 $A(2,0)$，$B(0,1)$，所以直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$，得 $y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$，

从而 $BM=1-y_M=1+\frac{2y_0}{x_0-2}$.

直线 PB 的方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，

令 $y=0$，得 $x_N=-\frac{x_0}{y_0-1}$，

从而 $AN=2-x_N=2+\frac{x_0}{y_0-1}$.

所以四边形 $ABNM$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}AN\cdot BM$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_0}{y_0-1}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$$

$$=\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{2(x_0y_0-x_0-2y_0+2)}$$

$$=\frac{2x_0y_0-2x_0-4y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}=2,$$

从而四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

训 练 七

1. e 【解析】因为 $y=x\ln x$，所以 $y'=\ln x+1$，令 $\ln x_0+1=2$，得 $x_0=e$.

2. 1 【解析】由于一条直线与一个平面平行，该直线虽然平行于该平面内无数条直线，但不是与该平面