也谈对数的起源

王冬兰 保继光

（北京师范大学数学科学学院 100875）

对数、微积分和解析几何并称为17世纪数学最伟大的三项发明.对数的引入让大数计算的简化成为了可能.事实上，对数的本质是等差数列(Arithmetic Progression)与等比数列(Geometric Progression)之间的对应关系.历史上，这种关系反复吸引了很多著名的数学家的关注.

公元前3世纪，阿基米德(Archimedes，公元前287—公元前212)在《数沙者》(The Sand Reckoner)中提出了一整套表示大数的方法，其中蕴含着等差数列与等比数列之间的对应关系.[1]在阿基米德的计数法中包含这样的内容：

已知数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m, \cdots, A_n, \cdots, A_{m+n-1}, \cdots$，若 $A_1=1, A_2=10, A_{m+n-1}=A_mA_n$，则 $A_{n+1}=A_2A_n=10A_n$.

阿基米德实际上给出的是如下两个数列之间的对应关系：

表1 阿基米德给出的对应关系

序数	1	2	3	4	5	6	7	8	…
A_n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	…

1 等差数列与等比数列对应关系的确立

1484年，法国数学家许凯(N. Chuquet，1445—1488)在《数的科学三部曲》(Le Triparty en la science des nombres)中给出了一个数列间的对应表格：

表2 许凯表格

序数	0	1	2	3	4	5	…	16	17	18	19	20
数	1	2	4	8	16	32	…	65536	131072	262144	524288	1048576

许凯指出等比数列中两个数之间的乘法可以转化为等差数列中相对应数的加法.[2][3]例如：表格中第二行等比数列中第二项与第四项相乘 $2\times8=16$，对应着第一行等差数列中第二项与第四项相加 $1+3=4$，即 $2^1\times8^3=16^4$.这里数的上标，表示的并不是指数，而是数在表格中对应的位置.基于这个对应关系，许凯定义了幂函数的乘法，得出结论：两个单项式的乘积可以由幂函数指数相加得出.

1544年，德国数学家施蒂费尔(M. Stifel，1487—1567)明确提出了等差数列与等比数列之间的对应关系.在《整数的算术》(Arithmetica Integra)中，他引入了与许凯相同的两个数列：

表3 施蒂费尔表格

指数	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	…
数	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	…

其中施蒂费尔对数列之间的关系给出了清晰的解释：等差数列中数的加法对应着等比数列中数的乘法，减法则对应着除法.同时施蒂费尔将等差数列中的项数叫做“指数”(exponent)，这也是第一次出现指数这个名词.施蒂费尔虽然在许凯的基础上将数列的对应关系由非负整数推广到了

负整数,但是与许凯一样,也仅仅局限在了幂函数的计算以及解决一些类似的代数等式上.

2 纳皮尔对数

2.1 纳皮尔对数的发明

17 世纪初期,随着航海、天文学的发展,人们需要一种简便的方法来解决复杂的三角学计算问题.这个问题吸引了苏格兰数学家纳皮尔(J. Napier,1550—1617)的注意.他基于等差数列与等比数列之间的对应关系,发明了伟大的"对数"(logarithm)."logarithm"这个词来源于希腊的词根"logos"(比率)和"arithmos"(数量),意思是"与比率相关的数".纳皮尔在使用"对数"这个名词之前,将其命名为"人造数"(artificial numbers).[4]

1614 年,纳皮尔在爱丁堡出版了著作《论述对数的奇迹》(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio),这部巨著被认为是世界上最伟大的科学发现之一,包含了对数表及其使用说明.纳皮尔去世后,1619 年,他的第二个儿子(R. Napier)整理出版了《做出对数的奇迹》(Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio),其中给出了对数表详细的证明过程和计算步骤.[5]

纳皮尔首先计算的是正弦的对数.在当时,一个角度 t 的正弦并不是用现在的比值定义的,而是被定义为给定半径的圆上圆心角 $2t$ 所对弦长的一半.(The sine of an angle was not regarded, as at present, as a ratio, but as the length of that semichord of a circle of given radius which subtends the angle at the centre.)[6]纳皮尔令圆的半径为 10^7,此时 90°角的正弦就为10^7,随着角度的减小正弦减小到 0.纳皮尔将角度 t 的范围确定在 0°～90°,以分为单位等距取值,正弦的范围为 0 到 10^7 之间的整数,所计算的就是这些整数的对数.

最初,纳皮尔尝试着去提供一个用等差数列测量等比数列的方法,或者是表示这两个数列之间的对应关系.令等比数列的首项 $a_0=10^7$,其公比为 $1-10^{-7}=0.9999999$,这样使得等比数列充分稠密,相邻数间的差值也就非常小,进而得到了如下的表格:

表 4 纳皮尔最初使用的两个数列表

B_n	0	1	2	…	n	…
A_n	10^7	$10^7\ (1-10^{-7})^1$	$10^7\ (1-10^{-7})^2$	…	$10^7\ (1-10^{-7})^n$	…

其中等比数列为 $A_n=10^7\ (1-10^{-7})^n, n\in\mathbf{N}$,相对应的等差数列为 $B_n=n$.纳皮尔将 B_n 称为 A_n 的对数.

可以发现基于这种对应关系计算对数计算量非常大,后来纳皮尔又寻求到了一条更深入、更有效的替代道路,并最终取得了成功.

2.2 纳皮尔对数的定义

纳皮尔精确的对数定义来源于一个运动的几何模型.纳皮尔构思了两个沿两条线运动的质点.点 P 从起点 A 开始在线段 AB ($AB=10^7$)上运动,初速度为10^7,在运动的过程中,点 P 的速度与其到终点 B 的距离 PB 成正比,设比例系数为 1;同时点 Q 从起点 C 开始沿射线 CD 以恒定速度10^7 运动.

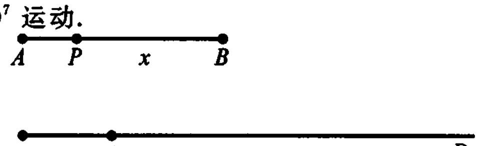

图 1

设点 P 与终点 B 的距离 $PB=x(t)$,点 Q 与起点 C 的距离 $CQ=y(t)$.因为 $AB=10^7$,所以 $AP=10^7-x(t)$,则点 P 的速度$\frac{d\,(10^7-x(t))}{dt}=x(t)$,解得 $x(t)=Ce^{-t}$.当 $t=0$ 时,$x(0)=10^7$,代入得 $C=10^7$,因此有 $x(t)=10^7e^{-t}$,$t=\ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$.因为点 Q 在射线 CD 上做匀速直线运动,所以 $y(t)=10^7t$.

纳皮尔将 y 定义为 x 的对数,记作

$y=Nap.\log x$,

所以

$$y=10^7\ln\left(\frac{10^7}{x}\right). \tag{1}$$

这就是纳皮尔对数定义的现代表示.

纳皮尔在表 4 中构造的对应关系用现代的方法表示为

$$y=\log_{(1-10^{-7})}\left(\frac{x}{10^7}\right),$$

$$x\in\{A_n\mid A_n=10^7(1-10^{-7})^n,n\in\mathbf{N}\},$$

而纳皮尔新定义对数为

$$y=10^7\ln\left(\frac{10^7}{x}\right)=10^7\log_{e^{-1}}\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

$$=\log_{e^{-10^{-7}}}\left(\frac{x}{10^7}\right),x\in(0,10^7].$$

由于 $(1-10^{-7})^{-10^7}\approx 2.71828196$，$e\approx 2.71828183$ 可知 $(1-10^{-7})^{-10^7}\approx e$ 即 $1-10^{-7}\approx e^{-10^{-7}}$，两个对数函数的底近似相等. 这样纳皮尔将一个离散的对应关系改用连续函数的方式近似表达了出来.

2.3 确定纳皮尔对数值

纳皮尔根据对数的定义着手计算正弦的对数. 后来他发现，不需要计算正弦在 $0\sim10^7$ 之间所有数的对数，只需要计算在 $5\times10^6\sim10^7$ 之间的对数就可以了. 对于小于 5×10^6 的正弦的对数，可以通过三角函数变换得到(在后面的内容中会提到)，这样就节省了很大的工作量. 与此同时，为了进一步简化计算，纳皮尔采用了一种巧妙的方法进行数列之间数的嵌入. 他构造了三个不同的等比数列，这些数列以 10^7 为首项，使用不同的公比.[7]

第一个数列的公比 $r_1=1-\frac{1}{10^7}$，$a_n=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n$，$n=0,1,2,\cdots,100$；

第二个数列的公比 $r_2=1-\frac{1}{10^5}$，$b_n=10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^n$，$n=0,1,2,\cdots,50$，由于 $r_1^{100}\approx r_2$，有 $b_1\approx a_{100}$；

第三个数列由 69 个子数列组成，每一个子数列包含 21 个数，将这 69 个子数列记为 $\{c_{1,n}\}$，$\{c_{2,n}\}$，$\{c_{3,n}\}$，…，$\{c_{69,n}\}$，$n\in\{0,1,2,\cdots,20\}$，数列内公比 $r_3=1-\frac{1}{2000}$，相邻数列间公比 $r_4=1-\frac{1}{100}$，即

$$c_{1,n}=10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^n,n=0,1,2,\cdots,20;$$

$$c_{2,n}=10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^n\left(1-\frac{1}{100}\right),n=0,1,2,\cdots,20;$$

…

$$c_{69,n}=10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^n\left(1-\frac{1}{100}\right)^{68},n=0,1,2,\cdots,20.$$

由于 $r_2^{50}\approx r_3$，有 $c_{1,1}\approx b_{50}$；由于 $r_3^{20}\approx r_4$，有 $c_{m,20}\approx c_{m+1,0}$，$m\in\{1,2,3,\cdots,68\}$.

在 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_{1,n}\}$，$\{c_{2,n}\}$，…，$\{c_{69,n}\}$ 这 71 个数列中，前一个数列的最后一项近似等于后一个数列中第二或第一项，恰好可以进行级数的嵌入. 同时数列中第一项 $a_0=10^7$，最后一项 $c_{69,20}\approx 4998609.40$，比 5×10^6 小，也恰好满足纳皮尔之前提到的所要计算的在 $5\times10^6\sim10^7$ 之间正弦的对数.

纳皮尔首先计算他所构造的这 71 个数列中数的对数，对于这个数列中数的对数，他并没有直接计算，而是通过区间近似的方式得到.

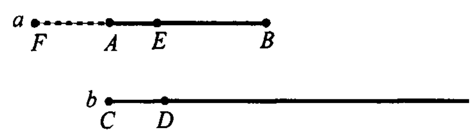

图 2

纳皮尔根据对数的定义，构造了如图 2 所示的图，其中点 A、点 C 分别为 a、b 运动的起点，其中点 b 在射线 CD 上做匀速直线运动，点 a 在线段 AB 上以初速度 10^7 做减速运动. 点 D 为点 E 的对应点，即 EB 的对数为 CD，此时有 $AE<CD$. 将线段 AB 沿点 A 向左作延长线，使其满足点 a 从点 F 到 A 运动的时间与点 a 从点 A 到点 E 运动的时间相等，此时有 $FA>CD$.

由点 a 的运动特点有点 a 到终点 B 的距离为 $x(t)=ce^{-t}$，其中 c 为线段 FB 的长度，由条件“点 a 从点 F 到 A 运动的时间与点 a 从点 A 到点 E 运动的时间相等”，则有 FB,AB,EB 构成等比数列，因此有 $\frac{FB}{AB}=\frac{AB}{EB}$，则有 $\frac{FB-AB}{AB-EB}=\frac{AB}{EB}$，即 $\frac{FA}{AE}=\frac{AB}{EB}$.

若令 $x=EB$，则有 $Nap.\log x=CD$，由 $AE<CD<FA$，则有 $AE<Nap.\log x<FA$ 成立；又由 $AE=10^7-x$，$FA=\frac{AB}{EB}\cdot AE=\frac{10^7}{x}(10^7-x)$，则有

$$10^7-x<Nap.\log x<\frac{10^7}{x}(10^7-x)\qquad ①$$

对于数列 $\{a_n\}$ 中的数，将 $a_1=9999999$ 代入①中，得到

$$1<Nap.\log 9999999<\frac{10^7}{9999999}\approx 1+10^{-7},$$

纳皮尔取其近似值为 $Nap.\log a_1\approx 1.00000005$. 再根据 $Nap.\log(a_i)=iNap.\log(a_1)$，这样数列 $\{a_n\}$ 中数的对数就计算出来了.

类似①的证明过程，当 $x<y$ 时有

$$10^7\,\frac{y-x}{y}<\mathrm{Nap.}\log x-\mathrm{Nap.}\log y<10^7\,\frac{y-x}{x}. \qquad ②$$

对于第二个数列 $\{b_n\}$ 中的数，由 $a_{100}\approx b_1$，根据公式②，有

$$10^7\,\frac{a_{100}-b_1}{a_{100}}<Nap.\log b_1-Nap.\log a_{100}$$

$$<10^7\,\frac{a_{100}-b_1}{b_1}$$

成立，进而可以求出 $Nap.\log b_1$，同时根据 $Nap.\log b_i=iNap.\log b_1$，可以求出第二个数列中数的对数. 类似地根据纳皮尔对数的性质，可以计算出其他数列 $\{c_{1,n}\}$，$\{c_{2,n}\}$，$\{c_{3,n}\}$，…，$\{c_{69,n}\}$ 中数的对数.

根据这三个数列中数的对数，纳皮尔开始计算正弦的对数，着手制作正弦对数表. 对于在 $5\times10^6\sim10^7$ 范围内，却不在这三个数列中的正弦 x，因为数列足够稠密，在数列中可以找到与其最接近的数 y，根据公式②，可以计算出 $Nap.\log x$ 的值.

对于小于 30°角的正弦的对数，即小于 5×10^6 的数的对数，根据三角函数关系 $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$，有

$$Nap.\log\left(\frac{1}{2}\times10^7\right)+Nap.\log(10^7\sin 2\alpha)$$

$$=Nap.\log(10^7\cos\alpha)+Nap.\log(10^7\sin\alpha),$$

即 $Nap.\log(10^7\sin\alpha)$

$$=Nap.\log\left(\frac{1}{2}\times10^7\right)+Nap.\log(10^7\sin 2\alpha)-$$

$$Nap.\log[10^7\sin(90^\circ-\alpha)].$$

为了使得到的对数值更加精确，纳皮尔基于对数的特点以及三角函数关系使用了更为复杂的方法提高精确度. 这样纳皮尔计算出了所有正弦的对数，并且绘制了对数表，为当时航海、天文学的计算带来了极大的便利.

2.4 纳皮尔对数的性质

对于 $a,b,c>0$，由(1)有

$$Nap.\log(ab)=10^7(\ln10^7-\ln a-\ln b)$$

$$=Nap.\log a+Nap.\log b-Nap.\log 1;$$

$$Nap.\log\left(\frac{a}{b}\right)=10^7(\ln10^7-\ln a+\ln b)$$

$$=Nap.\log a-Nap.\log b+Nap.\log 1.$$

在纳皮尔的对数结构中，若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则

$$Nap.\log a-Nap.\log b=Nap.\log c-Nap.\log d.$$

3 纳皮尔对数的改进

可以发现，纳皮尔对数并不是我们今天所熟知的对数，其结构是以比例为基础的几何结构，在计算上不能直接将两个数的对数和转化为两个数乘积的对数. 英国数学家布里格斯(H. Briggs，1561—1630)改进了纳皮尔对数，在 1624 年，他出版了《对数算术》(Arithmetica Logarithmica)一书，其中包含从 1～20000 和 90000～100000 间整数的对数，精确到 14 位小数. 在 1628 年，荷兰数学家弗拉克(A. Vlacq，1600—1667)补全了 20000～90000 之间数的对数，和布里格斯的结果一起出版了一个 1～100000 的对数表.[8] 在以后的三个世纪中，这个对数表几乎是构造一切对数表的依据. 对数表的发明极大地便利了天文学家的计算，法国著名数学家和天文学家拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827)评价到："因为省时省力，对数倍增了天文学家的寿命."

在这里还需要提到的是，瑞士的钟表匠比尔奇(J. Bürgi，1552—1632)在 1600 年左右也独立发明了对数，但他的著作《进数表》(Progress Tabulen)直到 1620 年才发表，当时纳皮尔对数表已经被人熟知并且风靡欧洲.[9]

随着对数的快速发展，17 世纪中叶，对数由西方的传教士传入中国. 明末清初数学家薛凤祚(1599—1680)与波兰传教士穆尼阁(J. N. Smogolenski，1611—1656)合编的《比例对数表》(1653)是我国第一本有关对数的著作. 清代著名数学家梅文鼎、戴震等人曾对纳皮尔对数加以研究. 1723 年清代梅瑴成等人编的《数理精蕴》出版，其中比较详细地介绍了常用对数的求法和造表法，推动了中国关于对数的研究. 很多数学家都在此基础上展开对数研究，并创造了新的计算方法. 清代数学家王贞仪(1768—1797)吸取梅文鼎等人的中西算法之长，对纳皮尔对数计算方法进行增补讲解，使之简易明了，写了三卷书向国人介绍这种算法.[10] 1845 年，晚清数学家戴煦(1806—1860)在《对数简法》中讨论了将开方运算转变为有限次的

或无限次的加减乘除运算,数学家李善兰(1811—1882)在《对数探源》中讨论了自然数与常用对数的关系等等,为对数在中国的发展注入了活力.[11]

4 现代对数的概念

著名数学家、数学教育家克莱因(F. Klein,1849—1925)说:"如果希望深入全面了解对数理论,最好是基本遵循它的历史发展".虽然在古希腊时期阿基米德提出了类似指数幂的雏形,在16世纪数学家施蒂费尔第一次提出指数这个名词,但是指数一直没有得到人们的重视.到了17世纪初期,纳皮尔发明了对数,对数作为计算工具走进了人们的视野.17世纪后半叶,英国数学家沃利斯(J. Wallis,1616—1703)给出了负数指数幂与分数指数幂的运算法则,之后牛顿(I. Newton,1643—1727)又给出了现代指数幂记号的形式.最后欧拉(L. Euler,1707—1783)在《无穷小分析引论》(Introductio in Analysin Infinitorum,1748)中明确了指数与对数之间的关系,才将二者真正联系到了一起.[12]在现行教科书中,都是先讲指数再讲对数,并采用欧拉的对数定义形式:"设$a>0$,$a\neq0$.如果a的b次幂等于N,即$a^b=N$,那么数b称为以a为底N的对数,记作$b=\log_a N$."

参考文献

[1] Heath T. L. The Works of Archimedes[M]. New York: Dover Publications,1959

[2]Panagiotou E N. Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms[J]. Science & Education, 2011,20(1): 1-35

[3]徐斌,汪晓勤.从指数律到对数[J].数学教学,2010(06):35-38

[4]Andrews FE. The Romance of Logarithms[J]. School Science and Mathematics,1928,28(2):121-130

[5]Ayoub R. What is a Napierian Logarithm[J]. The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No4 (Apr., 1993): 351-364

[6]Hobson E W. John Napier and The Invention of Logarithms [M]. Cambridge University Press, 1914

[7]Roegel D. Napier's ideal construction of the logarithms[DB/OL]. http://locomat.loria.fr/ , 2012

[8]Cajori F. A History of mathematics[M]. New York : Macmillan, 1926

[9](美)M·克莱因.古今数学思想[M].张理京等,译.上海:上海科学技术出版社,2014

[10]武际可.四位著名的女数学力学家[J].力学与实践,2012,34(02):85-88

[11]李兆华.戴煦关于对数研究的贡献[J].自然科学史研究,1985(04):353-362

[12]Cajori F. History of the Exponential and Logarithmic Concepts[J]. The American Mathema tical Monthly,1913,20(7):35-47

(上接第3页)

这类从微观性质导出宏观性质的推理,很容易出错.有一本很出色的高等数学教材,在证明"导数正则函数增"这个常用的定理时,是这样推理的:

> 还可以更确切些,如果$f'(x_0)>0$,则由定义可知当h充分小时
> $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0,$$
> 即得$f(x_0+h)>f(x_0)$.换言之,这是一个严格上升的函数.我们立刻可以推得
>
> **定理1.** 使$f'(x)>0$的区间是$f(x)$上升的区间,而使$f'(x)<0$的区间是$f(x)$下降的区间.

通常,这个定理的证明要用到拉格朗日中值公式,或实数的某种性质.如果上面这几行推理成立,无疑是微积分理论的大大简化,具有创新价值.可惜实际上这并不成立.我们在有理数域的区间[0,2]上定义一个函数$f(x)$:当$x^2<2$时,令$f(x)=x$,当$x^2>2$时,则令$f(x)=x-2$.这个函数在有理数域的区间[0,2]上处处有$f'(x)=1>0$,它在每点邻域是递增的,但$f(0)=0>f(1.5)=-0.5$,它在区间[0,2]上显然不是增函数.

显然,把有理数域换成[0,2]的任一稠密真子集,也能构造出类似的反例.总之,上列命题的成立有赖于实数系统的性质;推理过程完全不用实数性质,这推理不可能没有瑕疵.

允许我们重复一下,人人都会犯错.没有错最好,如果的确错了,改正就好.如果只是毛病,或考虑欠缺,是否今后加以说明,以免误导学生.