

江苏省仪征中学高二数学寒假作业

目 录

高二数学寒假作业（1）不等式	2
高二数学寒假作业（2）数列	4
高二数学寒假作业（3）复数	6
高二数学寒假作业（4）椭圆	8
高二数学寒假作业（5）双曲线	12
高二数学寒假作业（6）抛物线	16
苏州市 2020—2021 学年高二第一学期数学学业质量调研卷	20
常州市 2020—2021 学年高二数学学业水平监测	26

高二数学寒假作业(1) 不等式

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、单项选择题(本大题共5小题, 共25.0分)

1. 不等式 $(x+b)[(a-1)x+(1-b)] > 0$ 的解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$, 则不等式 $x^2 + bx - 2a < 0$ 的解集为()
A. $\{x|-2 < x < 5\}$ B. $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{5}\}$
C. $\{x|-2 < x < 1\}$ D. $\{x|-\frac{1}{2} < x < 1\}$
2. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a < 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2}$ 的最大值是()
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
3. 已知两个正数 a, b 满足 $3a + 2b = 1$, 则 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值是()
A. 23 B. 24 C. 25 D. 26
4. 已知 $a, b(a, b \in \mathbb{R}, a \neq b)$ 是关于 x 的方程 $x^2 - (k-1)x + k^2 = 0$ 两个根, 则以下结论正确的是()
A. k 的取值范围为 $(-1, 3)$
B. 若 $a, b \in (-\infty, 0)$, 则 k 的取值范围为 $(-\infty, 1)$
C. $ab + 2(a+b)$ 的取值范围是 $(-2, -\frac{11}{9})$
D. 若 $a < -1 < b$, 则 k 的取值范围为 $(-1, 0)$
5. 已知实数 $a > 0, b > 0$, 且 $9a + b = ab$, 若不等式 $a + b \geq -x^2 + 2x + 18 - m$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 m 的取值范围为()
A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3]$ C. $(-\infty, 6]$ D. $[6, +\infty)$

二、多项选择题(本大题共2小题, 共8.0分)

6. 若两个正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 且不等式 $x + \frac{y}{4} \leq m^2 - 3m$ 有解, 则下列实数 m 的取值范围中满足条件的()
A. $-1 < m < 4$ B. $m \leq -1$ C. $m \geq 4$ D. $-4 \leq m \leq 1$
7. 下列命题正确的是()
A. $0 < a < b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$;
B. $9x^2 - 6x + 1 > 0$ 的解集是全体实数 $\mathbb{R}$
C. $x > 0$, 则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是 $2 - 4\sqrt{3}$;
D. $2 < a < 3, -2 < b < -1$, 则 $0 < 2a + b < 5$;

三、填空题(本大题共2小题, 共10.0分)

8. 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值是_____.
9. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 2y = 3$, 则 xy 的最大值为_____, $\frac{3x+y}{xy}$ 的最小值为_____.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

10. 已知 $f(x) = x^2 - abx + 2a^2$.

(1) 当 $b = 3$ 时，①若不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $[1, 2]$ ，求实数 a 的值；②求不等式 $f(x) < 0$ 的解集.

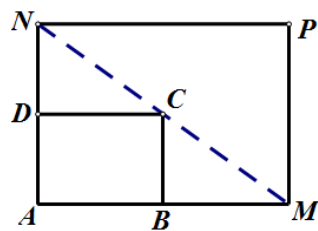
(2) 若 $f(2) > 0$ 在 $a \in [1, 2]$ 时恒成立，求实数 b 的取值范围.

11. 如图所示，将一个矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$ ，要求 M 在射线 AB 上， N 在射线 AD 上，且对角线 MN 过 C 点. 已知 $AB = 4$ 米， $AD = 3$ 米，设 AN 的长为 x ($x > 3$) 米.

(1) 要使矩形 $AMPN$ 的面积大于 54 平方米，则 AN 的长应在什么范围内？

(2) 求当 AM, AN 的长度分别是多少时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小，

并求出此最小值.



高二数学寒假作业(2) 数列

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、单项选择题(本大题共5小题, 共25.0分)

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 2$, $S_3 = 12$, 则 a_6 等于()
A. 8 B. 10 C. 12 D. 14
2. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 a_4 是 a_3 与 a_7 的等比中项, $S_8 = 32$, 则 S_{10} 等于()
A. 18 B. 24 C. 60 D. 90
3. 已知公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 且 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 S_n 取最大值时 n 的值为
A. 5或6 B. 4或5 C. 5 D. 4
4. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -60$, 且 $a_{n+1} = a_n + 3$, 则这个数列的前30项的绝对值之和为)
A. 495 B. 765 C. 3105 D. 120
5. 已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) + f(1-x) = 1$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前20项和为()
A. 100 B. 105 C. 110 D. 115

二、多项选择题(本大题共2小题, 共8.0分)

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, 公差 $d = 4$, 前 n 项和为 S_n , 则下列结论成立的有()
A. 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的前10项和为100
B. 若 a_1, a_3, a_m 成等比数列, 则 $m = 21$
C. 若 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}} > \frac{6}{25}$, 则 n 的最小值为6
D. 若 $a_m + a_n = a_2 + a_{10}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{16}{n}$ 的最小值为 $\frac{25}{12}$
7. 在递增的等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 a_4 = 32$, $a_2 + a_3 = 12$, 则下列说法正确的是()
A. $q = 1$ B. 数列 $\{S_n + 2\}$ 是等比数列
C. $S_8 = 510$ D. 数列 $\{\lg a_n\}$ 是公差为2的等差数列

三、填空题(本大题共2小题, 共10.0分)

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为 d 的等差数列, 前 n 项和 S_n ; 数列 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为 q 的等比数列, 前 n 项和 T_n ; 若数列 $\sqrt{S_n}$ 为等差数列, 数列 $\sqrt{T_n + \frac{1}{2}}$ 为等比数列, 则 $q + d =$ _____, $S_n =$ _____.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = (\sqrt{2})^{b_n} (n \in N^*)$. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 2$ ， $b_3 = 6 + b_2$.

(I) 求 a_n 和 b_n ;

(II) 设 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} (n \in N^*)$ ，记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(i) 求 S_n ;

(ii) 求正整数 k ，使得对任意 $n \in N^*$ 均有 $S_k \geq S_n$.

11. 已知首项都是 1 的数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\} (b_n \neq 0, n \in N^*)$ 满足 $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n + 2b_n b_{n+1} = 0$

(I) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式;

(II) 令数列 $b_n = 3^{n+1}$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

高二数学寒假作业（3）复数

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

一、单项选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 已知 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{1-i}{|i|}$ ，下列说法正确的是()

A. z 的虚部为 $-i$
B. z 对应的点在第一象限

C. z 的实部为 -1
D. z 的共轭复数为 $1+i$
2. 下列四个选项中，正确的是

A. 复平面内实轴上的点都表示实数，虚轴上的点都表示纯虚数

B. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，则 $z_1^2 = 0$ 且 $z_2^2 = 0$

C. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1^2 = z_2^2$

D. 设 z 为复数， $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $z + a = 2\bar{z} + bi$ ，则 $\bar{z} + a = 2z - bi$
3. 如果复数 z 满足 $|z + 2i| + |z - 2i| = 4$ ，那么 $|z + i + 1|$ 的最小值是()

A. 1
B. $\sqrt{2}$
C. 2
D. $\sqrt{5}$
4. 据记载，欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x (x \in \mathbb{R})$ 是由瑞士著名数学家欧拉发现的，该公式被誉为“数学中的天桥”. 特别是当 $x = \pi$ 时，得到一个令人着迷的优美恒等式 $e^{\pi i} + 1 = 0$ ，将数学中五个重要的数(自然对数的底 e ，圆周率 π ，虚数单位 i ，自然数的单位 1 和零元 0) 联系到了一起，有些数学家评价它是“最完美的数学公式”. 根据欧拉公式，若复数 $z = e^{\frac{\pi}{4}i}$ 的共轭复数为 $\bar{z}$ ，则 $\bar{z} =$ ()

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
B. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
D. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
5. 若复数 $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2019} + \frac{|3-4i|}{3+4i}$ ，则复数 z 对应的点在第()象限

A. 一
B. 二
C. 三
D. 四
6. 已知关于 x 的方程 $x^2 + (m + 2i)x + 2 + 2i = 0 (m \in \mathbb{R})$ 有实数根 n ，且 $z = m + ni$ ，则复数 z 等于 ()

A. $3 + i$
B. $3 - i$
C. $-3 - i$
D. $-3 + i$

二、多项选择题（本大题共 2 小题，共 8.0 分）

7. 已知复数 $z = \frac{i}{1-2i}$ ，则以下说法正确的是()

A. 复数 z 的虚部为 $\frac{i}{5}$

B. z 的共轭复数 $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

C. $|z| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

D. 在复平面内与 z 对应的点在第二象限
8. 已知复数 $z_1 = 2 - 2i$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点为 P_1 ，复数 z_2 满足 $|z_2 - i| = 1$ ，则下列结论正确的是

A. P_1 点的坐标为 $(2, -2)$
B. $\bar{z}_1 = 2 + 2i$

C. $|z_2 - z_1|$ 的最大值为 $\sqrt{13} + 1$
D. $|z_2 - z_1|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

三、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

9. 设复数 $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}i}\right)^3$ ，其中 i 为虚数单位，则 $|z| =$ _____.

10. 若 $\frac{a+bi}{i}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 与 $(2-i)^2$ 互为共轭复数，则 $a-b =$ _____.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

11. 已知复数 z 满足 $z + |z| = 2 + 8i$ ，求复数 z .

12. 已知复数 $z_1 = 2 + ai$ (其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a > 0$ ， i 为虚数单位)，且 z_1^2 为纯虚数.

(1) 求函数实数 a 的值；(2) $z = \frac{z_1}{1-i}$ ，求 $|z|$.

高二数学寒假作业（4）椭圆

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

一. 选择题：

1. 若方程 $x^2 + ky^2 = 2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则实数 k 的取值范围是()。

- A、(0,1) B、(0,1) $\cup$ (1, $+\infty$) C、(0, $+\infty$) D、(1, $+\infty$)

2. 已知 P 是椭圆上一定点， F_1 、 F_2 是椭圆的两个焦点，若 $\angle PF_1F_2 = 60^\circ$ ， $|PF_2| = \sqrt{3}|PF_1|$ ，则椭圆的离心率为()。

- A、 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B、 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C、 $2 - \sqrt{3}$ D、 $\sqrt{3}-1$

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(3,0)$ ，过点 F 的直线交 C 于 A 、 B 两点，若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$ ，则 C 的方程为()。

- A、 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ B、 $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ C、 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ D、 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

4. 焦点在 x 轴上的椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4a} + \frac{y^2}{a^2+1} = 1$ ($a > 0$)，则它的离心率 e 的取值范围为()。

- A、 $(0, \frac{1}{4}]$ B、 $(0, \frac{1}{2}]$ C、 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D、 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

5. 已知 A 、 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 长轴的两个端点， P 、 Q 是椭圆上关于 x 轴对称的两点，直线 AP 、 BQ 的斜率分别为 k_1 、 k_2 ，若 $\frac{1}{|k_1|} + \frac{1}{|k_2|}$ 的最小值为 4，则椭圆的离心率为()。

- A、 $\frac{1}{2}$ B、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C、 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，直线 $l: x + my - m = 1$ ($m \in R$)，直线 l 与椭圆的位置关系是()

- A. 相离 B. 相交 C. 相切 D. 不确定

7. (多选题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 且 $|F_1F_2| = 2$, 点

$P(1, 1)$ 在椭圆内部, 点 Q 在椭圆上, 则以下说法正确的是 ()

A. $|QF_1| + |QP|$ 的最小值为 $2a - 1$

B. 椭圆 C 的短轴长可能为 2

C. 椭圆离心率的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

D. 若 $\overrightarrow{PF_1} = \overrightarrow{F_1Q}$, 则椭圆的长轴长为 $\sqrt{5} + \sqrt{17}$

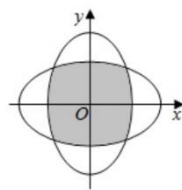
8. (多选题) 如图, 两个椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$, 内部重叠区域的边界记为曲线 C , P

为曲线 C 上的任意一点, 下列四个判断中, 正确命题为 ()

A. P 到 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0), E_1(0, -4), E_2(0, 4)$ 四点距离之和为定值;

B. 曲线 C 关于直线 $y = x, y = -x$ 对称;

C. 曲线 C 所围区域面积必小于 36; D. 曲线 C 总长度不大于 6π .



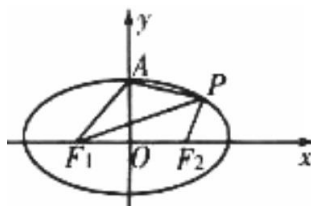
二、填空题:

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 上的两个焦点, P 是椭圆上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, 则 ΔF_1PF_2 的面积为_____。

10. 设 AB 是椭圆 E 的长轴, 点 C 在椭圆 E 上, 且 $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$, 若 $|AB| = 4, |BC| = \sqrt{2}$, 则椭圆 E 的两个焦点之间的距离为_____。

11. 若 A, B 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴的两个端点, 垂直于 x 轴的直线与椭圆交于点 M, N , 且 $k_{AM} \cdot k_{BN} = \frac{1}{4}$, 则椭圆 C 的离心率为_____。

12. 如图所示, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 P 为第一象限内椭圆上的一点, 若 $S_{\Delta PF_1A} : S_{\Delta PF_1F_2} = 2:1$, 则直线 PF_1 的斜率为_____。



三解答题:

13. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABF_2$ 的面积.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 且短轴的两个端点与右焦点是一个等边三角形的三个顶点, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆的右焦点 F 作直线 l , 与椭圆相交于 A, B 两点, 求三角形 AOB 面积的最大值, 并求此时直线 l 的方程.

15. 给定椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 称圆心在坐标原点 O , 半径为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆是椭圆 C 的“伴随圆”. 若椭圆 C 的一个焦点为 $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 其短轴上的一个端点到 F_2 距离为 $\sqrt{3}$.
- (1) 求椭圆 C 及其“伴随圆”的方程;
- (2) 若过点 $P(0, m) (m < 0)$ 的直线与椭圆 C 只有一个公共点, 且截椭圆 C 的“伴随圆”所得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 求 m 的值;
- (3) 过椭圆 C “伴随圆”上一动点 Q 作直线 l_1, l_2 , 使得 l_1, l_2 与椭圆 C 都只有一个公共点, 试判断直线 l_1, l_2 的斜率之积是否为定值, 并说明理由.

高二数学寒假作业(5) 双曲线

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一. 填空题:

- 经过点 $A(2, -2)$ 且与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 有公共渐近线的双曲线方程为 ().
 A. $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ B. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$
- 已知圆 M 经过双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的一个顶点和一个焦点, 圆心 M 在双曲线 C 上, 则圆心 M 到双曲线 C 的中心的距离为 ().
 A. $\frac{13}{4}$ 或 $\frac{7}{3}$ B. $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{8}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{16}{3}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 P 在双曲线 C 上, 若直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2, -1]$, 则直线 PA_1 斜率的取值范围是 ().
 A. $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$ B. $[-\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}]$ C. $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$ D. $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$
- 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 则该双曲线的渐近线方程为 ().
 A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm \sqrt{5}x$
- 设 O 为坐标原点, 直线 $x = a$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交 D, E 两点, 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 ().
 A. 4 B. 8 C. 16 D. 32
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 实轴长为 6, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{3}x$, 动点 M 在双曲线的左支上, 点 N 为圆 $E: x^2 + (y + \sqrt{6})^2 = 1$ 上一点, 则 $|MN| + |MF_2|$ 的最小值为 ().
 A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
- 已知点 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, 点 E 是右顶点, 过 F 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABE$ 是锐角三角形, 则双曲线 C 的离心率 e 的取值范围是 ().
 A. $(1, 2)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 1 + \sqrt{2})$ D. $(2, 1 + \sqrt{2})$

8. 设 F_1 、 F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若双曲线的右支上存在一点 P ，使得 $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_2}) \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$ ， O 为坐标原点，且 $|\overrightarrow{PF_1}| = \sqrt{3} |\overrightarrow{PF_2}|$ ，则双曲线 C 的离心率为()。

- A、 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B、 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ C、 $\sqrt{3}+1$ D、 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

9. (多选题) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 e_1 ，椭圆 C_1 的上顶点为 M ，且 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$ 。双曲线 C_2 和椭圆 C_1 有相同焦点，且双曲线 C_2 的离心率为 e_2 ， P 为曲线 C_1 与 C_2 的一个公共点，若 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则()

- A. $\frac{e_2}{e_1} = 2$ B. $e_1 e_2 = 2$ C. $e_1^2 + e_2^2 = \frac{5}{2}$ D. $e_2^2 - e_1^2 = \frac{5}{2}$

10. (多选题) 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点， A 为左顶点， P 为双曲线右支上一点，若 $|\overrightarrow{PF_1}| = 2|\overrightarrow{PF_2}|$ 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° ，则()

- A. 双曲线的离心率 $\sqrt{3}$ B. 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$
C. $\angle PAF_2 = 45^\circ$ D. 直线 $x + 2y - 2 = 0$ 与双曲线有两个公共点

二. 填空题:

11. 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x$ ，则双曲线的离心率为_____。

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线 l 交双曲线的左支于 A, B 两点，则 $|\overrightarrow{BF_2}| + |\overrightarrow{AF_2}|$ 的最小值为_____。

13. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，离心率为 e ，则 $\frac{a^2 + e^2}{2b}$ 的最小值为_____。

14. 我国著名数学家华罗庚曾说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”，事实上，有很多代数问题可以转化为几何问题加以解决。如：与 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 相关的代数问题可以转化为点 $A(x, y)$ 与点 $B(a, b)$ 之间距离的几何问题。结合上述观点，可得方程

$|\sqrt{x^2 + 8x + 20} - \sqrt{x^2 - 8x + 20}| = 4$ 的解为_____。

三. 解答题:

15. 已知中心在原点的双曲线 C 的右顶点为 $(\sqrt{3}, 0)$, 离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程和渐近线方程;

(2) 若双曲线 C 上存在一点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ (其中 F_1, F_2 为双曲线的两个焦点), 求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

16. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点 $F(2, 0)$, 一个顶点为 $A(\sqrt{3}, 0)$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与双曲线 C 的左右两支各有一个交点, 求 k 的取值范围.

17. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 是双曲线上一点, 满足 $PF_1 \perp PF_2$ 且 $|PF_1| = 8, |PF_2| = 6$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 若直线 l 交双曲线于 A, B 两点, 若 AB 的中点恰为点 $M(2, 6)$, 求直线 l 的方程.

高二数学寒假作业(6) 抛物线

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一. 填空题:

1. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(2, y_0)$ 到其准线的距离为 4, 则抛物线的标准方程是()。

A、 $y^2 = x$ B、 $y^2 = 4x$ C、 $y^2 = 8x$ D、 $y^2 = 16x$

2. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于两点 $A、B$ ($A、B$ 异于原点), 抛物线的焦点为 F 。若双曲线的离心率 2, $|AF| = 7$, 则 $p =$ ()。

A、3 B、6 C、12 D、42

3. 一动圆过点 $A(0,1)$, 圆心在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上, 且该圆恒与定直线 l 相切, 则直线 l 的方程为()。

A、 $y = -1$ B、 $y = -\frac{1}{32}$ C、 $y = \frac{1}{32}$ D、 $y = 1$

4. 若抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 准线为 l , 点 A 在抛物线上, $B、D$ 是准线上关于 x 轴对称的两点。若 $|FA| = |FB|$, $BF \perp FD$, 且三角形 ABD 的面积为 $4\sqrt{2}$, 则 p 的值是()。

A、1 B、2 C、4 D、6

5. 已知点 P 在直线 $x + y + 5 = 0$ 上, 点 Q 在抛物线 $y^2 = 2x$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为()。

A、 $\sqrt{2}$ B、 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C、 $2\sqrt{2}$ D、 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

6. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , $P、Q$ 是抛物线上的两个点, 若 $\triangle PQF$ 是边长为 2 的正三角形, 则 p 的值是()。

A、 $\sqrt{3} - 1$ B、 $\sqrt{3} \pm 1$ C、 $2 \pm \sqrt{3}$ D、 $2 + \sqrt{3}$

7. 已知等边三角形 ABF 的顶点 F 是抛物线 $C_1: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 顶点 B 在抛物线的准线 l 上, 且 $AB \perp l$, 则点 A ()。

A、在 C_1 开口内 B、在 C_1 上 C、在 C_1 开口外 D、与 p 值有关

8. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , $A、B$ 是抛物线上横坐标不相等的两点, 若 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点是 $M(4,0)$, 则 $|AB|$ 的最大值为()。

A、2 B、4 C、6 D、10

9. (多选题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , l 与 x 轴交于点 C , 若点 A 在 l 上, 点 B 为抛物线上第一象限内一点, 直线 BF 与抛物线交于另一点 D , $\triangle ABF$ 是正三角形, 且四边形 $ABFC$ 的面积是 $\frac{27\sqrt{3}}{2}$, 则 ()

A. l 的方程为 $x = -\frac{3}{2}$

B. $|DF| = 2$

C. $CD \perp BD$

D. $\triangle ODF$ 的面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

10. (多选题) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点, 以线段 AB 为直径的圆交 y 轴于 M 、 N 两点, 则 ()

A. 若抛物线上存在一点 $E(2, t)$ 到焦点 F 的距离等于 3, 则抛物线的方程为 $y^2 = 4x$

B. 若 $|AF| = 2|BF|$, 则直线 l 的斜率为 $2\sqrt{2}$

C. 若直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则 $|AB| = \frac{4p}{3}$

D. 设线段 AB 的中点为 P , 若点 F 到准线的距离为 2, 则 $\sin \angle PMN$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

二. 填空题:

11. 已知抛物线的顶点在原点, 焦点在 y 轴上, 抛物线上的点 $P(a, -2)$ 到焦点的距离为 3, 则抛物线的方程是_____。

12. 点 M 为抛物线 $y^2 = 8x$ 上的一点且在 x 轴的上方, F 为抛物线的焦点, 以 Fx 为始边, FM 为终边的角 $\angle xFM = 60^\circ$, 则 $|FM| =$ _____。

13. 已知顶点在坐标原点, 对称轴为 x 轴的抛物线过点 $P(1, 2\sqrt{2})$, 则该抛物线的标准方程为_____; 设 F 为该抛物线的焦点, A 、 B 、 C 为该抛物线上三点, 若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$, 则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$ _____。

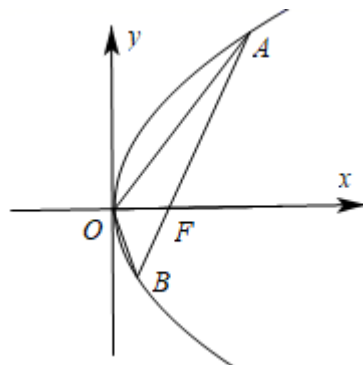
14. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A 、 B 两点, 分别过 A 、 B 作 l 的垂线, 垂足为 C 、 D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p =$ _____, 三角形 CDF 的面积为_____。

三. 解答题:

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $M(2, m)$ 为其上一点, 且 $|MF| = 4$.

(1) 求 p 与 m 的值;

(2) 如图, 过点 F 作直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 求直线 OA, OB 的斜率之积.



16. 在① $PF = x_0 + 1$, ② $y_0 = 2x_0 = 2$, ③ $PF \perp x$ 轴时, $|PF| = 2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并回答.

问题: 已知抛物线 $C: y^2 = 3px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 C 上, 且____,

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若直线 $l: x - y - 2 = 0$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle ABF$ 的面积.

17. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , O 为坐标原点, 点 P, Q 是抛物线 C 上异于点 O 的两个不同的动点, 当直线 PQ 过点 F 时, $|PQ|$ 的最小值为 8.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若 $OP \perp OQ$, 证明: 直线 PQ 恒过定点.

苏州市 2020—2021 学年高二第一学期数学学业质量调研卷

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ”的否定为

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$
C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$

2. 已知复数 $z = -i(1+2i)$ (i 为虚数单位)，则复数 z 的实部为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

3. 不等式 $(x+5)(3-2x) \geq 6$ 的解集为

- A. $\left\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{9}{2}\right\}$ B. $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{9}{2}\right\}$
C. $\left\{x \mid x \leq -\frac{9}{2} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{9}{2} \leq x \leq 1\right\}$

4. 若 $0 < b < 1$ ，则“ $a > \sqrt{b}$ ”是“ $a > b$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在弹性限度内，弹簧拉伸的距离与所挂物体的质量成正比，即 $d = \frac{m}{k}$ ，其中 d 是距离（单位 cm）， m 是质量（单位 g）， k 是弹簧系数（单位 g/cm）. 弹簧系数分别为 k_1, k_2 的两个弹簧串联时，得到的弹簧系数 k 满足 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ，并联时得到的弹簧系数 k 满足 $k = k_1 + k_2$. 已知物体质量为 20g，当两个弹簧串联时拉伸距离为 1cm，则并联时弹簧拉伸的最大距离为

- A. $\frac{1}{4}$ cm B. $\frac{1}{2}$ cm C. 1cm D. 2cm

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点 M 与焦点 F 的距离为 10，点 M 到 x 轴的距离为 $2p$ ，则 p 的值为

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

7. 若正整数 m, n 满足 $\frac{n+4}{n+2} < \sqrt{m} < \frac{n+3}{n+1}$ ，则所有满足条件的 n 的和为

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 1

8. 单分数（分子为 1，分母为正整数的分数）的广泛使用成为埃及数学重要而有趣的特色，埃及人将所有的真分数都表示为一些单分数的和，例如 $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ， $\frac{7}{29} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} +$

$\frac{1}{87} + \frac{1}{232}$ ，…，现已知 $\frac{2}{101}$ 可以表示成 4 个单分数的和，记 $\frac{2}{101} = \frac{1}{606} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ，其中 $x, y,$

z 是以 101 为首项的等差数列，则 $y+z$ 的值为

- A. 505 B. 404 C. 303 D. 202

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9. 早在古巴比伦时期，人们就会解一元二次方程．16 世纪上半叶，数学家得到了一元三次、一元四次方程的解法．此后数学家发现一元 n 次方程有 n 个复数根（重根按重数计）．下列选项中属于方程 $z^3 - 1 = 0$ 的根的是

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. 1

10. 已知 $a > b > 0 > c > d$ ，则

- A. $a - c > b - d$ B. $ad > bc$ C. $\frac{b}{a} < \frac{b-c}{a-c}$ D. $\frac{c^2}{a} < \frac{d^2}{b}$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 与直线 $y = kx + m$ ($k \neq \pm 2$, $m \in \mathbb{R}$) 有唯一的公共点，则动点 $P(k, m)$ 与定点 $Q(0, 2)$ 的距离可能为

- A. 2 B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，其前 n 项和 $S_n = pa_{n+1} + r$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p > 0$)．

- A. 数列 $\{a_n\}$ 的公比为 p B. 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列
C. $r = -p - 1$ D. 当 $p - \frac{1}{4r}$ 取最小值时， $a_n = 3^{n-1}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知复数 z 满足 $(1+2i)z = 3+4i$ (i 为虚数单位)，则复数 z 的模为_____．

14. 已知 $a > 0$, $b > 0$ ，且 $2a + b = 4$ ，则 $ab + \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为_____．

15. 在流行病学中，基本传染数 R_0 是指在没有外力介入，同时所有人都没有免疫力的情况下，一个感染者平均传染的人数． R_0 一般由疾病的感染周期、感染者与其他人的接触频率、每次接触过程中传染的概率决定．初始感染者传染 R_0 个人为第一轮传染，这 R_0 个人每人再传染 R_0 个人为第二轮传染， $\dots$ ．假设某种传染病的基本传染数 $R_0 = 3$ ，那么初始一名感染者，经过三轮传染后，感染总人数将达到_____人；若感染总人数达到 1000 人，则应采取紧急防控措施，那么应在第_____轮传染开始前采取紧急防控措施．（参考数据： $\lg 2 \approx 0.3$, $\lg 3 \approx 0.48$ ）（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 $4\sqrt{6}$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，且 $OA \perp OB$ ，过 O 作 $OD \perp AB$ 交 AB 于点 D ，点 D 的坐标为 $(2, 1)$ ，则椭圆 C 的方程为_____．

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率分别为 e_1 ， e_2 ，其中 $a > b > 0$.

（1）求 $e_1^2 + e_2^2$ 的值；

（2）若双曲线渐近线的斜率小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求 e_1 和 e_2 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知不等式 $ax^2 + (3 - a)x - 3b < 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的解集为 $A = \{x \mid -3 < x < 1\}$.

（1）求实数 a, b 的值；

（2）设 $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 2}{x - 2}$ ($x \in A$)，当 x 为何值时 $f(x)$ 取得最大值，并求出其最大值.

19. (本小题满分 12 分)

在① $2S_n = 2n^2 + a_n$, ② $a_3 + a_5 = 16$ 且 $S_3 + S_5 = 42$, ③ $\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{n+1}{4n+2}$ 且 $S_7 = 56$ 这三个条件中任

选一个, 补充在下面的问题中, 并加以解答.

问题: 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n , _____. 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1 = a_1$,

$b_2 = a_3$, 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n} + b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

(注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)

20. (本小题满分 12 分)

著名数学家庞加莱说“我感受到了数学的美、数字和形状的协调, 以及几何的优雅”. 为了让学生体会数学之美, 某校数学组开设了特色校本课程, 老师利用两类圆锥曲线构造了一个近似“W”形状的曲线, 它由抛物线 C_1 的部分和椭圆 C_2 的一部分构成 (如图 1), 已知在平面直角坐

标系 xOy 中, $C_1: x^2 = 2py (p > 0)$ 和 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, F_1 是公共焦点, $|OF_1|$

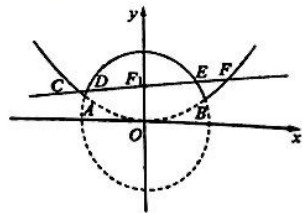
$= 1$, $|AF_1| = \frac{5}{3}$ (如图 2).

(1) 求 C_1 和 C_2 的方程;

(2) 过点 F_1 作直线 l 与“W”形状曲线依次交于 C, D, E, F 四点, 若 $|CF| = \lambda |DE|$, 求实数 λ 的取值范围.



(第 20 题图 1)



(第 20 题图 2)

21. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

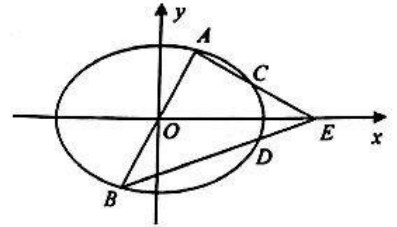
(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n , 最小值为 m_n , 令 $b_n = \frac{M_n + m_n}{2}$, 称数列 $\{b_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的“中程数数列”. ①求“中程数数列” $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ; ②若 $b_m = a_k (m, k \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } m > k)$, 求所有满足条件的实数对 (m, k) .

22. (本小题满分 12 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过原点 O 的直线交该椭圆于 A, B 两点(点 A 在 x 轴上方), 点 $E(4, 0)$. 当直线 AB 垂直于 x 轴时, $|AE| = 2\sqrt{5}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 设直线 AE 与椭圆的另一交点为 C , 直线 BE 与椭圆的另一交点为 D . ①若 $OC \parallel BE$, 求 $\triangle ABE$ 的面积; ②是否存在 x 轴上的一点 T , 使得直线 CD 恒过点 T ? 若存在, 求出 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



常州市 2020—2021 学年高二数学学业水平监测

一、单项选择题：

1. 两实数 a, b 满足 $a < b$ ，则下列结论正确的是

- A. $a^2 < b^2$ B. $b^2 > ab$ C. $a^3 < b^3$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2. 不等式 $2x^2 - 7x + 3 > 0$ 的解集为

- A. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ C. $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

3. 设 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $z(3-i)=10$ ，则在复平面内复数 z 对应的点的坐标为

- A. $(1, 3)$ B. $(3, 1)$ C. $(-1, -3)$ D. $(-3, -1)$

4. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，向量 $\vec{a}=(1, -1, -2)$ ， $\vec{b}=(1, 1, 3)$ 分别为异面直线 l_1, l_2 的方向向量，则异面直线 l_1, l_2 所成角的余弦值为

- A. $-\frac{\sqrt{66}}{11}$ B. $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$ C. $\frac{\sqrt{66}}{11}$ D. $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

5. 若 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的焦点与双的曲线焦点重合，则该双曲线的渐近线方程为

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

6. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，以 F 为端点的射线与抛物线相交于 A ，与抛物线的准线相交于 B ，若 $\vec{FB} = 4\vec{FA}$ ，则 $\vec{FA} \cdot \vec{FB} =$

- A. 9 B. 8 C. 6 D. 4

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则下列命题一定正确的是

- A. 若 $S_{2020} > 0$ ，则 $a_1 > 0$ B. 若 $S_{2021} > 0$ ，则 $a_1 > 0$
C. 若 $S_{2020} > 0$ ，则 $a_2 > 0$ D. 若 $S_{2021} > 0$ ，则 $a_2 > 0$

8. 在我国古代数学著作《九章算术》里有这样一段描述：今有良马和弩马发长安至齐，齐去长安一千一百二十五里，良马初日行一百零三里，日增十三里；弩马初日行九十七里，日减半里．良马先至齐，复还迎弩马，二马相逢．当二马相逢时，良马所行路程为

- A. 1345 里 B. 1395 里 C. 1440 里 D. 1470 里

二、多项选择题：

9. 若正实数 a, b 满足 $a+b=1$ ，则下列结论正确的有

- A. $ab \leq \frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{2}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ D. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公差为 d ，已知 $a_3 = 12$ ， $S_{12} > 0$ ， $S_{13} < 0$ ，则下列结论正确的有

- A. $a_6 + a_7 < 0$ B. $a_7 < 0$ C. d 可以取负整数 D. 对任意 $n \in N^*$ ，有 $S_n \leq S_6$

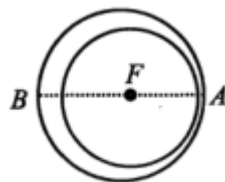
11. 2020 年 11 月 28 日, “嫦娥五号” 顺利进入环月轨道, 其轨道是以月球的球心 F 为一个焦点的椭圆 (如图所示). 已知它的近月点 A (离月球表面最近的点) 距离月球表面 m 千米, 远月点 B (离月球表面最远的点) 距离月球表面 n 千米, AB 为椭圆的长轴, 月球的半径为 R 千米. 设该椭圆的长轴长, 焦距分别为 $2a$, $2c$, 则下列结论正确的有

A. $a = \frac{m+n}{2}$

B. $a = \frac{m+n}{2} + R$

C. $c = \frac{n-m}{2}$

D. $c = \frac{n-m}{2} + R$



12. 离心率为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (即黄金分割比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的倒数) 的双曲线称为黄金双曲线

线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 实轴端点分别为 A_1, A_2 (其中 A_1 在 A_2 左侧), 虚轴端点分别为 B_1, B_2 , 过 F_2 作 x 轴的垂线与双曲线交于 P, Q 两点, 则下列结论正确的有

A. $\angle POF_2 = 45^\circ$

B. $|PQ| = |F_1F_2|$

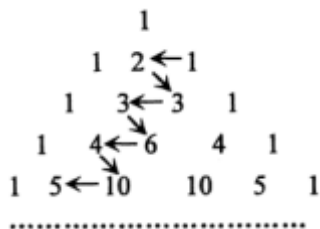
C. $\triangle B_1F_1A_2$ 为锐角三角形

D. $|B_1B_2|$ 是 $|A_1A_2|, |F_1F_2|$ 的等比中项

三、填空题:

13. 若正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1a_5 = 4$, 当 $\frac{1}{a_2} + \frac{4}{a_4}$ 取最小值时, 数列 $\{a_n\}$ 的公比是_____.

14. “杨辉三角” 是二项式系数在三角形中的一种几何排列, 在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中就有出现. 如图所示, 在“杨辉三角” 中, 除每行两边的数都是 1 外, 其余每个数都是其“肩上” 的两个数之和, 例如第 4 行的 6 为第 3 行中两个 3 的和. 若在“杨辉三角” 中从第二行右边的 1 开始按“锯齿形” 排列的箭头所指的数依次构成一个数列: 1, 2, 3, 3, 6, 4, 10, 5, ..., 则在该数列中, 第 35 项是_____.



15. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, E 为 OA 中点, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 若 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = c$,

$\overrightarrow{EF} = pa + qb + rc$, 则 $p + q + r =$ _____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 P , 使得 $|PF_1| = 4|PF_2|$,

其中 F_1, F_2 分别为椭圆的左右焦点, 则椭圆的离心率的取值范围是_____.

四、解答题：

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = 3$ ， $S_7 = 28$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式； (2) 若 $a_m \leq 10 < a_{m+1}$ ，求 S_m 的值。

18. (12 分) 已知对任意 $x \in (1, +\infty)$ ，不等式 $-x^2 + 4x - 5 \leq m \leq x + \frac{4}{x-1}$ 成立，记满足条件的 m 的取值集合为 A ，记关于 y 的不等式 $y^2 + 2ay - 3a^2 \leq 0 (a > 0)$ 的解集为 B 。

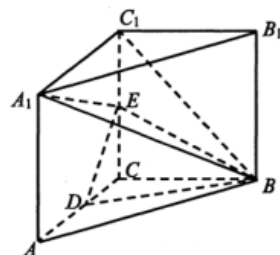
(1) 求集合 A 与 B ；

(2) 若 “ $t \in A$ ” 是 “ $t \in B$ ” 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围。

19. (12 分) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=CC_1=2$, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 在棱 AC 上 (不同于点 A, C), 点 E 为棱 CC_1 的中点.

(1) 求直线 BC_1 与平面 A_1BE 所成角的正弦值;

(2) 若二面角 A_1-BE-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 求线段 CD 的长.



20. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$, 斜率为 3 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 与 x 轴交于点 P .

(1) 若 $|AF| + |BF| = 5$, 求直线 l 的方程; (2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求弦 AB 的长.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为 1, 公差为 d 的等差数列, 偶数项是首项为 2, 公比为 q 的等比数列. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_3 = a_4$, $a_3 + a_5 = 2 + a_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设实数 $M > 0$, 若对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 都有 $\frac{S_{2k-1}}{a_{2k}} \in (0, M]$ 求 M 的最小值.

22. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 点 $(1, e)$, $(e, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其中 e 为椭圆 C 的离心率. 若 A, B 分别是椭圆 C 的上顶点与右顶点, 动直线 $y = kx (k > 0)$ 与椭圆 C 交于 E, F 两点, 其中点 E 在第一象限.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $\triangle AEB$, $\triangle AFB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的最小值, 并求出此时 k 的值.

