等高线模式下的一类几何最值问题的再探究①

邓　清[1]　　　　夏小刚[2]

(1. 贵阳市乌当中学　550018;2. 贵州师范大学数学科学学院　550025)

数学是模式的科学,数学的本质特征就是在模式化的个体抽象中对模式进行研究.[1]波利亚认为,在解决一个自己感兴趣的问题后,要善于去总结一个模式,并把他储存起来,以后才可以随时用它去解决类似的问题,进而提高自己的解题能力.波利亚在他的著作中概括了几个数学模式,其中,"相切的等高线模式"是探究极值点的一种方法.笔者阅读思考后发现,运用该方法探究几何中的一类最值问题时,会有一种全新的体验,特与大家分享.

1　"相切的等高线模式"解读

如果问题中能找到一系列等高线,穿过给定路径(或与给定路径有多于一个交点)的等高线上不可能达到极值点,只有与给定路径相切的等高线,其切点处才有可能达到极值点.[2]这就是"相切的等高线模式".该模式中,"等高线"原本指的是地形图上高程相等的相邻各点所连成的闭合曲线,在这里指的是使得问题中所求变量 f 的值相等的所有点组成的曲线,因此也可以称作"等值线".为了弄清楚该模式的意义,我们先来看这样一个例子:

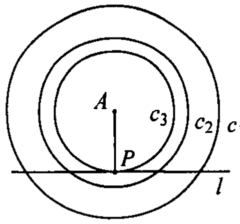

图 1

如图 1,在已知直线 l 上求一点 P,使得它与已知点 A 有最小距离.问题中要求的变量 f 是到点 A 距离问题,那么等高线就是到点 A 距离相等的点的集合,也就是以 A 为圆心的一组同心圆.点 P 既要在等高线上,又要在给定路径——直线 l 上,根据"相切的等高线模式"的概念,当且仅当等高线与直线相切时,切点 P 即为所求.连接 AP,根据圆的切线性质,则有 $AP\perp l$,根据垂线段最短定理,该结论显然是正确的.

根据以上解读,运用等高线模式解决问题时,可按如下思路或步骤进行思考:

(1)找准变量 f,根据变量构造出一系列等高线——暂且称之为"等高线族";

(2)理解问题中的给定路径的曲线 l;

(3)找到"等高线族"与给定路径曲线的切点,切点即为所求.

2　运用等高线模式探究几何最值问题

中学数学中的几何变量中的最值问题,根据变量的几何名称,可以大致分为线段长度最值问题,图形面积与体积最值问题,角度的最值问题.研究以上最值问题的文献不在少数,例如文章[3]主要以函数的方法探究了几何图形中的面积、体积、角度等最值问题,文章[4]主要以三角换元的方法解决了一类几何最值问题,但鲜有文章从等高线模式的视角探究以上中学数学中的几何最值问题.下面,文章将先采用常规方法,在从等高线的视角解决一些典型的几何最值问题,获取不同

① 基金项目:全国教育科学"十三五"规划课题(课题批准号:XHA180286):面向核心素养的数学问题情境教学测评模型研究.

万方数据

的体验.

问题 1 最短路径问题

如图 2,直线 l 的解析式为 $y=x+4$,$A(-2,0)$,$B(2,0)$为 x 轴上两定点,点 P 为直线 l 上一动点,求当 $AP+BP$ 的值最小时,点 P 的坐标.

解法一:如图 2,作点 A 关于直线 l 对称的点 A',连接 $A'B$,与直线 l 交点 P 即为所求.设直线 $A'A$ 与直线 l 的交点坐标为$(t,t+4)$,可求得 $A'(2t+2,2t+8)$,由 $k_{A'A}=\frac{2t+8}{2t+4}=-1$ 可得 $t=-3$,$A'(-4,2)$,所以直线 $A'B$ 的方程为$\frac{y-2}{2-0}=\frac{x+4}{-4-2}$,即 $x+3y-2=0$,根据

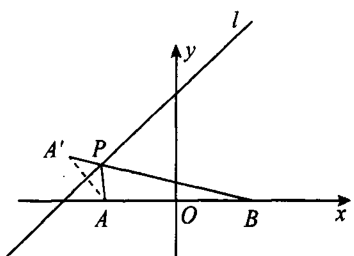

图 2

$\begin{cases}x+3y-2=0\\y=x+4\end{cases}$,$x=-\frac{5}{2}$,$y=\frac{3}{2}$,

因此 $P\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

解法二(等高线模式):该问题中的变量为 $AP+BP$ 的值,$AP+BP$ 的值相等的等高线为以 A、B 为焦点的椭圆曲线族,如图 3,给定路径为直线 l,当椭圆与直线 l 相切时,切点 P 即为所求.在椭圆曲线族中,始终有 $c=2$,可设椭圆曲线族的方程为$\frac{x^2}{n+4}+\frac{y^2}{n}=1$,根据$\begin{cases}y=x+4\\\frac{x^2}{n+4}+\frac{y^2}{n}=1\end{cases}$,整理得 $(2n+4)x^2+8(n+4)x-n^2+12n+64=0$①.根据 $\Delta=0$,可得 $n=6$,代入①得 $x_1=x_2=-\frac{5}{2}$,$y=-\frac{5}{2}+4=\frac{3}{2}$,即 $P\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

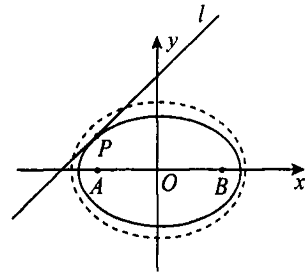

图 3

问题 2 最小周长问题

已知矩形的面积为 k,求该矩形的最小周长.

解法一:设矩形的长为 x,则宽为$\frac{k}{x}$,周长为 $C=2(x+\frac{k}{x})\geqslant 4\sqrt{k}$.

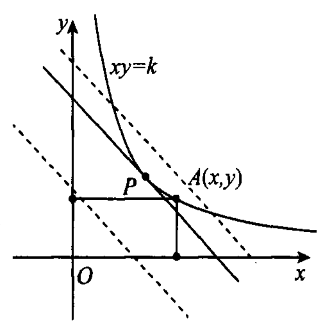

图 4

解法二(等高线模式):如图 4,以矩形所在邻边为轴建立坐标系,因为矩形面积为 k,则可动顶点的坐标 $A(x,y)$满足 $xy=k$,即动点的给定路径为反比例函数图像 $y=\frac{k}{x}$在第一象限的部分,等高线是 $2(x+y)=c$(c 为常数)的直线系,c 取不同的常数得到不同的等高线(他们相互平行),只有等高线与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$图像相切时,切点 P 即为所求.

因为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$和直线 $2(x+y)=c$ 的图像都关于直线 $y=x$ 对称,因此切点应在直线 $y=x$ 上,即可设 $A(t,t)$,有 $t^2=k$,$t=\sqrt{k}$,即得矩形的最小周长为 $4t=4\sqrt{k}$.

万方数据

问题 3　最大张角问题

如图 5，墙上竖直贴有一条标语，标语高度 $AB=a$，标语底端离地面高度为 b，若有一身高为 c 的人要看墙上的标语，那么他离墙多远时看标语上 A、B 的视角最大？并求出此时最大张角的正切值.

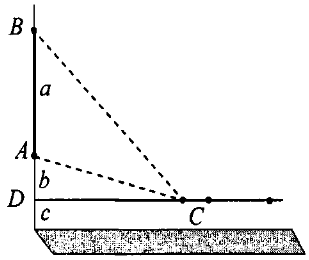

图 5

解法一：设 CD 长为 x，$\tan\angle BCD=\frac{a+b}{x}$，

$\tan\angle ACD=\frac{b}{x}$，则

$$\tan\angle ACB=\frac{\tan\angle BCD-\tan\angle ACD}{1+\tan\angle BCD\cdot\tan\angle ACD}$$

$$=\frac{a}{x+\frac{ab+b^2}{x}}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{ab+b^2}},$$

当且仅当 $x=\frac{ab+b^2}{x}$ 时，取等号，此时，$x=\sqrt{ab+b^2}$，即当 $CD=\sqrt{ab+b^2}$ 时，最大张角的正切值为 $\frac{a}{2\sqrt{ab+b^2}}$.

解法二（等高线模式）：如图 6，假设人的视点为 C，那么点 C 的给定路径为平行于地面，离地面高度为 c 的一条直线上，张角 $\angle ACB$ 的等高线为以 AB 为弦的一系列圆上，当且仅当以 AB 为弦的圆与给定路径相切时，切点 C 即为最大视角点.

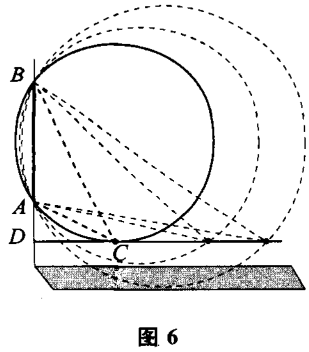

图 6

找到点 C 的位置后，如图 7，连接 OB，OC，则过 O 作 $OM\perp AB$，则垂足 M 为 AB 中点，$OC=MD=\frac{a}{2}+b$，$OB=OC=\frac{a}{2}+b$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OBM$ 中，

$$OM=\sqrt{BO^2-BM^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+b\right)^2-\frac{a^2}{4}}$$

$$=\sqrt{b^2+ab},$$

即 $DC=\sqrt{b^2+ab}$，此时易证 $\angle ACB=\angle BOM$，

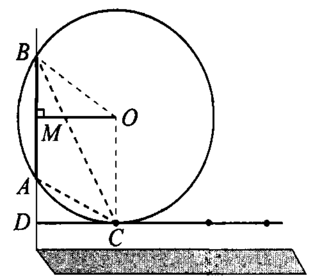

图 7

则 $\tan\angle ACB=\tan\angle BOM=\frac{BM}{OM}=\frac{a}{2\sqrt{b^2+ab}}$，

即得当他离墙的距离为 $DC=\sqrt{b^2+ab}$ 时张角最大，最大张角的正切值为 $\frac{a}{2\sqrt{b^2+ab}}$.

3　结束语

以上探究中先用常规方法分别研究几何背景中的最短路径、最小周长和最大张角问题，再从波利亚“相切的等高线模式”的视角进行探究.

一方面说明探究结论的可靠性，另一方面，也呈现了解决此类最值问题的又一方法，体现数学问题解决方法的多样性，更以多元视角展现了数学方法的丰富性和趣味性，体现数学和谐之美.

参考文献

[1] 郑毓信. 新数学教育哲学[M]. 上海：华东师范大学出版社，2015

[2] G·波利亚. 数学与猜想（第一卷）[M]. 李心灿，王日爽，译. 北京：科学出版社，2001

[3] 侯绪兵. 构造二元目标函数求解解析几何中的最值问题[J]. 高中数学教与学，2011(9)：27－29

[4]李金兴. 巧用三角换元探求两个几何最值取到的条件[J]. 数学通报，2015，54(2)：34－35

万方数据