# 命题:会赏会编更会创
## ——高中数学试题命制的心得体会

江苏省太仓高级中学 范世祥 (邮编:215400)
合肥市五十中学东校 王 胜 (邮编:230011)

一道高质量的数学题,在课堂教学中可以很好地诠释它蕴涵的知识点,在学情检测中可以很好地体现它的考查价值,在教学评价中可以很好地提供它的科学依据. 会解题者常有,但善于命题的不多见. 命制一道高质量的数学题并不是一件容易的事,需要命题人不断地学习,不断地提高自身的数学素养,同时在平时要比其他人更要注意身边的各种事物,还要有较强的灵感.

笔者自参加工作以来,一直非常注重数学试题的命制研究,有幸参与了多次省级、市级的命题工作,从解题到命题,一路走来,也积累了一定的命题经验,本文梳理了笔者近年来命题的心得体会,与同行们交流.

### 1 赏析:命题手法

高考真题凝聚了众多教育教学研究专家的心智,在命题初期,不断地赏析和解读高考真题的命制手法非常有必要,从高考真题中感悟命题招术,然后从中借鉴、模仿.

**案例1**

**题1-1** (2011年高考数学新课标全国1卷理科第16题)在$\triangle ABC$中,$B=60^\circ$,$AC=\sqrt{3}$,则$AB+2BC$的最大值为_______.

**题1-2** (2014年高考数学新课标全国1卷理科第16题)已知$a=2$,且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$,则$\triangle ABC$面积的最大值为_______.

**赏析** 以上两道高考题均是解三角形中一类经典问题的改编,该经典问题就是已知三角形的一边及其对角,求该三角形的周长和面积的最大值. 此类问题解法多样,考查解三角形中的基础知识和基本技能,高考命题专家就是从这样一类经典题出发,稍作改编,命制出非常漂亮的高考题,而且真正起到了教学评价的作用. 题1-1,将周长改变为$2a+c$,将$a$的系数调整为2,体现了很高的命题智慧,如果考查$a+c$的最大值,很多同学可能直接猜测等边三角形时取得最大值,这样就失去了考查的价值. 题1-2,首先将$A=\frac{\pi}{3}$用$(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$隐藏,感觉这样还不够隐蔽,继续将此式中的$a$用常数2隐藏.

以上两例让我们领略这种将同义词进行等价替换,将代数式稍作变形、调整系数等命题手法,还可以将此类问题改编成一道纯代数不等式问题:已知实数$x>0,y>0$,且$x^2+y^2-xy=1$,求$x+2y$的取值范围. 将$x,y$分别看成$\triangle ABC$的两边$a$、$b$,且$c=1$,由$x^2+y^2-xy=1$,得$a^2+b^2-ab=c^2$,由余弦定理,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,所以$C=\frac{\pi}{3}$. 此时问题转化为:在$\triangle ABC$中,已知$c=1,C=\frac{\pi}{3}$,求$a+2b$的取值范围. 容易求得$a+2b\in(1,\frac{2\sqrt{21}}{3}]$. 设问变为"取值范围"又增加了问题解决的难度.

### 2 改编:命题途径

#### 2.1 从课堂教学中来

一线教师经常有这种感觉,在课堂教学中,与学生交流中,批阅作业中,经常会灵光一现,对试题的改编有一种非常好的想法,需要我们及时记录,否则这种灵感稍纵即逝.

**案例2**

**题2-1** 已知平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 若$\boldsymbol{e}$为平面单位向量,则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|$的最大值是_______.

基金项目:江苏省基础教育前瞻性教学改革实验项目"指向理性精神培育的数学创新实验课程研究"(编号:2020JSQZ0146)

**题2-2** 已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,若对任意单位向量$\boldsymbol{e}$,均有$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值是_______.

在教学平面向量数量积运算律时,教科书就分配律给出了详细证明,向量投影在证明过程中起到了关键作用.教学中,关于运算律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$的证明,通过构造图形,帮助学生直观认识投影向量间的关系,受到公式定理证明的启发,我们可以改编以上试题供同学们训练,这样可以起到很好的价值导向,既要关注问题的本质,也要引导同学们重视公式定理的生长生成过程.

### 2.2 从解题活动中来

在解题中学习命题,将解题活动比作入宝山,所以我们不能"入宝山而空返",总要从解题中汲取营养,获取命题的灵感和素材.理解问题本质,解得透彻,编得就轻松.

**案例3**

(2013年高考数学新课标全国1卷理科第12题)设$\triangle A_nB_nC_n$的三边长分别为$a_n$、$b_n$、$c_n$,$\triangle A_nB_nC_n$的面积为$S_n$,$n=1,2,3,\cdots$.若$b_1>c_1$,$b_1+c_1=2a_1$,$a_{n+1}=a_n$,$b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$,则(  )

A.$\{S_n\}$为递减数列

B.$\{S_n\}$为递增数列

C.$\{S_{2n-1}\}$为递增数列,$\{S_{2n}\}$为递减数列

D.$\{S_{2n-1}\}$为递减数列,$\{S_{2n}\}$为递增数列

本题巧妙地将解三角形、数列、解析几何的相关知识结合在一起,试题颇具创意,但若宥于数列通项公式的求解以及试题背景的识破,则很难形成有效的解题思路.为此,笔者设计以下两个问题来进行深入剖析,挖掘该试题命制背后的故事.

(1)已知$b_1>c_1$,$b_1+c_1=2a_1$,$a_{n+1}=a_n$,$b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$,求数列$\{b_n+c_n\}$的通项公式;求数列$\{b_n-c_n\}$的通项公式.

(2)设$\triangle A_nB_nC_n(n\in\mathbf{N}^*)$内角$A_n$、$B_n$、$C_n$所对的边长分别为$a_n$、$b_n$、$c_n$,若$b_n+c_n=2a_1$,$a_n=a_1$,则动点$A_n$的轨迹是什么?

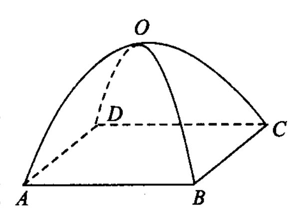
本题一旦识破点$A_n$在以$B_n$、$C_n$为焦点的椭圆上运动,而且随着$n$的增大,动点$A_n$越来越靠近椭圆短轴的端点,从而$\{S_n\}$为递增数列.正如数学家华罗庚所说:解题即转化,如果能从数列中跳出来,转化为椭圆的性质的应用,解法灵动了,问题变得简单了.找到题中不一样背景,移步换形,就会有新的认识,就会有突破,正如身在庐山之中,只能看到它的一峰一岭一丘一壑,识破问题的背景,解法自然触及本质,视野就不再受到局限,解题也不拘泥了,由此可以炮制出很多改编题,比如:设$\triangle A_nB_nC_n(n\in\mathbf{N}^*)$内角$A_n$、$B_n$、$C_n$所对的边长分别为$a_n$、$b_n$、$c_n$,若$b_1>c_1$,$b_n+c_n=2a_1$,$a_n=a_1$,$b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$,$c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$,则$\angle A_n$的最大值是____.

### 2.3 从现实生活中来

新高考命题非常注重现实情境试题的命制,试题取材于我们现实生活中的对象,考查学生运用数学知识解决问题的能力,生活中处处有数学,用数学的眼光观察周围的世界,就会捕捉到许多鲜活有趣的素材.

**案例4**

祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家,在数学上有突出贡献,他在实践的基础上提出了体积计算原理(祖暅原理):"幂势既同,则积不容异."利用祖暅原理将半球的体积转化为一个圆柱与一个圆锥的体积之差,从而得出球的体积计算公式.如图是一种"四脚帐篷"的示意图,用任意平行于帐篷底面$ABCD$的平面截帐篷,得截面四边形为正方形,平面$AOC$和平面$BOD$均垂直于平面$ABCD$,曲线$AOC$和$BOD$均为半径为1的半圆.模仿上述球的体积计算方法,可得该帐篷的体积为(  )



**案例4图**

A.$\dfrac{2}{3}$  B.$\dfrac{4}{3}$  C.$\dfrac{\pi}{3}$  D.$\dfrac{2\pi}{3}$

本题素材来源于现实生活中的"四脚帐篷",为了计算一个不规则几何体的体积,借助祖暅原理,模仿球的体积公式推导方法,构造相应的几

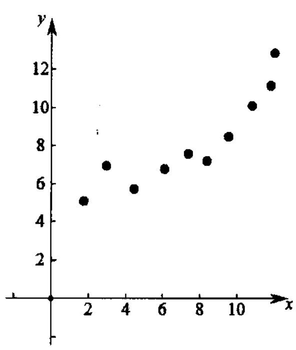
何体,从而得到该帐篷的体积. 取材于生活,回归于课本.

### 3 原创:命制流程

原创一道试题一般要经历如下三个步骤. 第一步,聚焦专题,积累素材;第二步,拟定初稿;第三步,精细打磨.

比如我们要命题一道原创的统计概率解答题,首先要做的工作就是聚焦统计概率专题,收集近年来的所有高考真题和部分模拟试题,从中找到命题的规律,主要考查哪些知识点和如何进行考查,然后初步拟定原创题打算考查的知识点,形成试题初稿,最后再精装修,进行适当的包装,试题语言的锤炼等.

**案例5** 某公司现有30种产品,为确定下一年度投资策略提供决策依据,需了解年研发经费和年宣传经费对年销售额的影响. 甲、乙两位研究员分别从该公司独立、随机地选取10种产品的数据进行统计分析.




(1)在此次调研中,求该公司产品$A$被甲研究员或乙研究员选中的概率;

(2)甲研究员对选取的10种产品的年研发经费$x_i$(单位:万元)和年销售额$y_i(i=1,2,\cdots,10)$(单位:十万元)数据作了初步处理,得到下面的散点图及一些统计量的值.

| $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{10} y_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^2$ | $\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^4$ | $\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-3)^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 65 | 75 | 205 | 8773 | 2016 |

根据散点图拟定$y$关于$x$的回归方程为$\hat{y}=\hat{b}(x-3)^2+\hat{a}$. 求$\hat{a}$,$\hat{b}$的值(结果精确到0.1),预测某产品的年研发经费为13万元时,年销售额是多少?

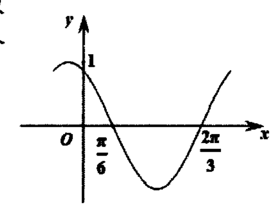
(3)记$X$表示该公司被甲研究员或乙研究员选中的产品个数,求使$P(X=k)$取得最大值的整数$k$.

**附** 对于一组数据$(v_1,u_1)$,$(v_2,u_2)$,$\cdots$,$(v_n,u_n)$,其回归直线$u=\alpha+\beta v$的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})(u_i-\bar{u})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})^2}$,$\hat{\alpha}=\bar{u}-\hat{\beta}\bar{v}$.

本题是统计概率的综合题,考查的知识点主要是独立事件的概率计算,成对数据相关性的回归分析,而且需要考生从非线性回归变换到线性回归,最后通过组合数的计算求出概率的单调性情况,进而得到概率取得最大值时的自变量值.

知之非难,行之不易. 原创一道好题需要综合考虑诸多因素,根据不同的题型要求,我们要关注试题的科学性、合理性以及有效性. 见贤思齐,见不贤而内自省,下面提供几个原创试题不太成功的案例,供自省之用.

**案例6** 右图是函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象,则$\sin(\omega x+\varphi)=$




A. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

C. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ D. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

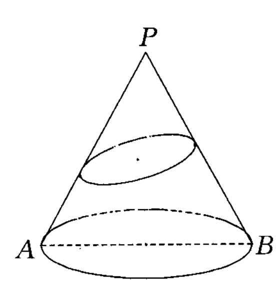
本题是2020年新高考全国1卷的一道多选题,鉴于多选题的特点,本题其实只要看选项就可以断定选BC. 因为只有选项A的周期是$2\pi$,所以排除A,再根据诱导公式的知识可知BC是等价的,而且与D不等价,故只能选BC.

多选题作为新高考卷中的新题型,试题的命制、选项的设置等都需要仔细打磨,命制一道高质量的多选题并非易事.

**案例7**

**7-1** 在$\triangle ABC$中,角$A$,$B$,$C$所对的边分别为$a$,$b$,$c$,已知$a=1$,$A=\dfrac{2\pi}{3}$. 求$b+3c$的最大值;

**7-2** 如图,截面与圆锥侧面相交所得的封闭曲线为椭圆,$AB$为圆锥底面的一条直径,$P$为顶点. 若$AB=2$,$PA=3$,则过点$A$的截面椭圆周长的最小值为



# 安徽中考填空压轴题的新趋势——两问填空题

安徽省南陵县城东实验学校　　邹守文　　(邮编:241300)

**摘　要**　通过对2020年和2021年安徽中考数学真题和2021年模拟题的分析,剖析了两问填空压轴题的特点,阐述了基于考查内容和试题结构对两问填空题进行了分类,从而预计此类填空题可以作为安徽填空压轴题的新趋势,并给出教学建议.

**关键词**　填空压轴题;两问填空题;新趋势

在安徽省中考数学试卷中有4道填空题,每题5分,其中前三题比较基础,考查基础知识和基本技能,但第14题作为填空题的压轴题,承载了一定的区分功能,所以颇受教师和学生的关注,2020年和2021年第14题均以两问填空题的形式呈现,具有很好的社会反响,预计会成为以后中考命题的趋势.

**1　试题特点**

虽然这种题型只出现两次,在深入分析这两年中考真题,和通过对2021年相关模拟试题的分析,归纳出此类试题的一般特点:

1.1　小巧灵动

两问填空题,顾名思义是在一道填空题中设置两个问题,和解答题不同的是,这两个问题,可以是独立的小问题,也可以是一个问题的两个方面,不论这两个问题的关系怎么样,都特别小,可以是两个问题的地位相同,也可以是地位不同的,但都体现一个"小"字,虽然问题"小",但其中的思维含量不一定都小,有的是一个问题容易,另一个问题有一定的思维含量,但都显得特别灵活,给人眼前一亮的感觉.

1.2　考查适度

以前的填空压轴题,有的是以多选的形式出现,可以绕开相应的选项,只需排除其中的错误选项,就能得到正确答案,有一定的投机性;有时又以多解填空题的形式出现,既要考查思维的充分性,又要考查思维的完备性,对学生来说,难度太大,区分度差,会出现形同虚设的情况.两问填

---

A. $2\sqrt{3}$　　　　B. $3\sqrt{3}$

C. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　　　　D. 6

这两道试题均是由经典问题改编而得,咋一看还挺不错,细思后发现都是错题.真可谓:改编有风险,命题需谨慎.

通过以上案例,可以看出命制一道高质量试题并非易事,稍有不慎,命制的试题就出问题.命题是一次由内而外的工作,编题的过程不仅仅是一个解题的过程,而且是一个将解题引向深入的研究过程.因此,编拟数学试题需要深厚的数学功底,良好的思维品质,这就需要我们命题人不断地学习,不断地提升自身的数学素养,同时在平时要比其他人更要注意身边的各种事物和细节,养成随时记录的习惯,养成批判性的思维.

赏析高考真题的命题手法,感悟拼凑法、迁移法、重组法等命题招术;注重在平时的教育教学活动中改编试题,在课堂教学中、在解题活动中、在日常生活中不断获取命题素材;收素材、拟初稿、精加工是原创一道试题需要经历的三步曲.总之,命题工作,任重而道远,我们一直在路上.

**参考文献**

1　范世祥.改编有风险,命题需谨慎[J].中学数学教学参考,2019(10上旬):77－78

2　张敏,范世祥.洞察教的行为,提高学的质量[J].中小学课堂教学研究,2020(11):54－58

(收稿日期:2021－06－21)