数学活动课程讲座

# 构造法在数学竞赛代数问题中的应用

华接春
(湖南省长沙市长郡中学,410002)

中图分类号:O141.2 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2021)02-0002-06

(本讲适合高中)

构造法是一种重要的数学方法,巧妙的构思、精美的构形常常令人拍案叫绝,但又往往很难弄清构造的来龙去脉,让人欣赏之余却有力不从心之感. 近年重要数学赛事,几乎都考查到构造法,被应用于解决存在性问题、否定性问题等等.

构造法广泛分布在竞赛中几何问题、代数问题、数论问题、组合问题四大模块. 本文着重分析构造法在代数模块中的应用.

## 1 构造代数式

**例1** 对于实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10},b_1,b_2,\cdots,b_{10}$,证明:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{10}^2)$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10})^2+$$
$$(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3+\cdots+a_9b_{10}-a_{10}b_9)^2.$$

**【分析】**观察多出来的式子,它把变元4个分为一组,产生 $a_{2i-1}b_{2i}-a_{2i}b_{2i-1}$ 构造出 $a_{2i-1}b_{2i-1}+a_{2i}b_{2i}$. 则

$$(a_{2i-1}b_{2i}-a_{2i}b_{2i-1})^2+(a_{2i-1}b_{2i-1}+a_{2i}b_{2i})^2$$
$$=(a_{2i}^2+a_{2i-1}^2)(b_{2i}^2+b_{2i-1}^2)$$

化为了左边形式.

**证明** 令 $x_k=a_{2k-1}b_{2k-1}+a_{2k}b_{2k}$,

$y_k=a_{2k}b_{2k-1}-a_{2k-1}b_{2k}$,

$x_k^2+y_k^2=(a_{2k}^2+a_{2k-1}^2)(b_{2k}^2+b_{2k-1}^2)$.

则 $$\left(\sum_{k=1}^{2n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2n}b_k^2\right)$$
$$\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(a_{2k}^2+a_{2k-1}^2)(b_{2k}^2+b_{2k-1}^2)}\right)^2$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k^2+y_k^2}\right)^2$$
$$\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2.$$

令 $n=5$ 得证.

## 2 构造方程

**例2** 证明:若复数 $a$、$b$、$c$ 满足

$$\begin{cases}(a+b)(a+c)=b,\\(b+c)(b+a)=c,\\(c+a)(c+b)=a,\end{cases}$$

则 $a$、$b$、$c$ 为实数.

**【分析】**由于题中给出三个复数,且方程多为对称形式,可先考虑构造一个三次方程,使得 $a$、$b$、$c$ 为其三个根,再利用条件把方程解出来,最后只需验证此方程的三个根均为实根即可.

**证明** 设 $a$、$b$、$c$ 为方程

$$x^3-px^2+qx-s=0$$

的三个复根. 则

$$\begin{cases}a+b+c=p,\\ab+bc+ca=q,\\abc=s.\end{cases}$$

记 $$\begin{cases}(a+b)(a+c)=b, & ①\\(b+c)(b+a)=c, & ②\\(c+a)(c+b)=a. & ③\end{cases}$$

收稿日期:2020-12-15

①+②+③得 $p^2+q=p$.

①$\times a+$②$\times b+$③$\times c$ 得

$q=p^3+3s-2pq$.

又 $b=(p-c)(p-b)$,

$c=(p-a)(p-c)$,

$a=(p-b)(p-a)$,

则 $s=((p-a)(p-b)(p-c))^2=(pq-s)^2$.

由三式解得 $p(p+1)^2(4p-3)=0$.

故 $p=0,-1,\frac{3}{4}$.

(1)当 $p=0$ 时,$q=s=0$.

则 $a=b=c=0$ 均为实数.

(2)当 $p=\frac{3}{4}$时,$q=\frac{3}{16}$,$s=\frac{1}{64}$.

则 $a=b=c=\frac{1}{4}$均为实数.

(3)当 $p=-1$ 时,$q=-2$,$s=1$.

则方程为 $x^3+x^2-2x-1=0$.

令 $f(x)=x^3+x^2-2x-1$,

$f(-2)=-1<0$, $f(-1)=1>0$,

$f(0)=-1<0$, $f(2)=7>0$.

则 $a$、$b$、$c$ 均为实数.

## 3 构造函数

**例 3** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为实数,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为正实数. 证明:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}\right)\geqslant\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}\right)^2.$$

**【分析】**条件中 $a_i$、$b_i\in\mathbf{R}$,导致许多不等式无法使用,应另寻方法.

**证明** 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{d_id_j}{c_i+c_j}x^{c_i+c_j}(x>0).$$

则 $xf'(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}d_ix_i^{c_i}\right)^2\geqslant0$

$\Rightarrow f'(x)\geqslant0\Rightarrow f(x)\geqslant f(0^+)=0$.

特别地,$f(1)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{d_id_j}{c_i+c_j}\geqslant0$.

故对于任意的 $t\in\mathbf{R}$,均有

$$0\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}{c_i+c_j}=At^2+2Ct+B,$$

其中,$A=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}$,$B=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}$,

$C=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}$.

因此,$AB\geqslant C^2$.

**【评注】**构造二次函数,利用函数单调性得到不等式.

## 4 构造不等式

**例 4** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$,满足:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2=1,\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0.$$

证明:$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^2\leqslant n$.

**证明** 注意到,

$$1+\lambda^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2.$$

记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,$B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

则 $(n-B^2)\lambda^2-2AB\lambda+n-A^2\geqslant0$.

由 $\Delta\leqslant0$ 即证.

**例 5** 求函数

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{x_1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^2}+\frac{x_2}{(1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+x_n)^2}$$

的最大值 $m_n$,用 $m_{n-1}$表示 $m_n$,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n$,其中,$x_i\geqslant0$.

**【分析】**注意到分母的线性和形式,宜先作分母代换,再用待定系数法消去变元来求最值.

**解** 令 $a_i=\frac{1}{1+x_i+\cdots+x_n}$,$a_{n+1}=1$. 则

$$x_i=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}.$$

故 $f_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}.$

构造下列不等式

$$\begin{cases}\frac{a_1^2}{a_2}+\lambda_1^2a_2\geqslant2\lambda_1a_1,\\ \frac{a_2^2}{a_3}+\lambda_2^2a_3\geqslant2\lambda_2a_2,\\ \cdots\cdots\\ \frac{a_n^2}{1}+\lambda_n^2\geqslant2\lambda_na_n,\end{cases}$$

其中,参数$\lambda_i\geqslant0$.

相加知只需使

$$\begin{cases}2\lambda_1=1,\\ 2\lambda_2=1+\lambda_1^2,\\ \cdots\cdots\\ 2\lambda_n=1+\lambda_{n-1}^2,\end{cases}$$

即有$f_n\leqslant\lambda_n^2$.

从而,$\lambda_{n+1}^2=\frac{1}{4}(\lambda_n^2+1)^2$.

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^2=1$.

## 5 构造数列

**例6** 设无穷数列$\{x_i\}$:

$x_0=1,x_{i+1}\leqslant x_i(i=0,1,2,\cdots)$.

证明:对每一个这样的数列,总有一个$n\geqslant1$,使得

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant3.999.$$

**【分析】**首先,不难构造出 $x_i=\frac{1}{2^i}$,可使

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\to4.$$

注意此数列的特点.

考虑构造一个新数列$\{a_n\}$,使

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant a_nx_0. \quad ①$$

只要 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$ 即可,但$\{a_n\}$的确定要由归纳完成,而式①不能归纳,因此,可考虑归纳一个更强的结论:对起点不作要求,就可以往前归纳,即

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+\frac{x_{i+1}^2}{x_{i+2}}+\cdots+\frac{x_{i+n-1}^2}{x_{i+n}}\geqslant a_nx_i. \quad ②$$

**证明** 先证明:存在正数列$\{a_n\}$($n\geqslant1$)满足式②,其中,$a_n$与$i$无关.

对$n$归纳.

当$n=1$时,由$x_i\geqslant x_{i+1}$,则$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}\geqslant x_i$.

故$a_1=1$.

设$a_n$已确定.则

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+\left(\frac{x_{i+1}^2}{x_{i+2}}+\cdots+\frac{x_{i+n}^2}{x_{i+n+1}}\right)$$

$$\geqslant\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+a_nx_{i+1}\geqslant2\sqrt{a_n}x_i.$$

故只需取$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$.

由此得$a_n=4\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2^{n-1}}}}\right)$.

在式②中取$i=0$得

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant a_n.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$,故得证.

**【评注】**不等式并不复杂,但方法和结论都是重要的.

**例7** 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为正实数.令

$$b_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}(k=1,2,\cdots,n),$$

$$C_n=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2,$$

$$D_n=(a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2.$$

证明:$C_n\leqslant D_n\leqslant2C_n$.

**证明** 构造数列

$x_n=2C_n-D_n,y_n=D_n-C_n(n\in\mathbf{Z}_+)$.

则$x_{n+1}-x_n$

$=(2C_{n+1}-D_{n+1})-(2C_n-D_n)$

$=2(a_{n+1}-b_{n+1})^2-(a_{n+1}-b_{n+1})^2-n(b_{n+1}^2-b_n^2)+2(b_{n+1}-b_n)(a_1+\cdots+a_n)$

$=((n+1)b_{n+1}-nb_n-b_{n+1})^2-$

$$n(b_{n+1}^2-b_n^2)+2nb_n(b_{n+1}-b_n)$$
$$=(n^2-n)(b_{n+1}-b_n)^2$$
$$\geqslant 0.$$

故 $x_n \geqslant x_1=(a_1-b_1)^2=0.$

从而，$x_n \geqslant 0.$

类似地，

$$y_{n+1}-y_n$$
$$=n(b_{n+1}^2-b_n^2)-2(b_{n+1}-b_n)(a_1+\cdots+a_n)$$
$$=n(b_{n+1}-b_n)^2 \geqslant 0.$$

又 $y_1=D_1-C_1=0$，则 $y_n \geqslant 0.$

因此，$C_n \leqslant D_n \leqslant 2C_n.$

## 6 构造复数

**例 8** 设 $A=\left\{(x,y)\left|x^2-y^2=\frac{x}{x^2+y^2}\right.\right\}$,

$B=\left\{(x,y)\left|2xy+\frac{y}{x^2+y^2}=3\right.\right\}$,

$C=\{(x,y)\mid x^3-3xy^2+3y=1\}$,

$D=\{(x,y)\mid 3x^2y-3x-y^3=0\}$.

证明：$A\cap B=C\cap D$.

【分析】$A\cap B$ 表示数对 $(x,y)$ 要同时满足 $x^2-y^2=\frac{x}{x^2+y^2}$，$2xy+\frac{y}{x^2+y^2}=3$，在复数恒等的充分必要条件中会同时出现两个等式（实部和虚部）并且 $x^2-y^2$、$2xy$ 恰为 $z^2=(x+y\,\mathrm{i})^2$ 的实部和虚部，因此，考虑构造复数 $z=x+y\,\mathrm{i}$，并使 $\frac{x}{x^2+y^2}$、$\frac{-y}{x^2+y^2}+3$ 也为某个复数的实、虚部.

**证明** 构造复数 $z=x+y\,\mathrm{i}$. 则

$\mathrm{Re}\,z^2=x^2-y^2$，$\mathrm{Im}\,z^2=2xy$.

而 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}+3\,\mathrm{i}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$,

$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+3\,\mathrm{i}\right)=3-\frac{y}{x^2+y^2}$,

于是，$A\cap B$ 即

$$\mathrm{Re}\,z^2=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}+3\,\mathrm{i}\right),$$

且 $\mathrm{Im}\,z^2=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+3\,\mathrm{i}\right)$.

故 $z^2=\frac{1}{z}+3\,\mathrm{i}$

$$\Rightarrow z^3=1+3\,\mathrm{i}\,z$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2y\,\mathrm{i}-3xy^2-y^3\,\mathrm{i}=1+3x\,\mathrm{i}-3y$$
$$\Rightarrow x^3-3xy^2=1-3y,3x^2y-y^3=3x,$$

即 $C\cap D$.

因此，$A\cap B=C\cap D$.

## 7 构造多项式

**例 9** 设 $n(n\geqslant 4)$ 个两两不同的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足：

$$\sum_{i=1}^n x_i=0,\sum_{i=1}^n x_i^2=1.$$

证明：一定能在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中找到四个不同的实数 $a$、$b$、$c$、$d$，使得

$$a+b+c+nabc\leqslant\sum_{i=1}^n x_i^3$$
$$\leqslant a+b+d+nabd.$$

【分析】已知是关于 $\sum_{i=1}^n x_i$、$\sum_{i=1}^n x_i^2$ 的信息，结论是关于 $\sum_{i=1}^n x_i^3$ 的，应想到构造多项式

$$(x-u)(x-v)(x-w)$$
$$=x^3-(u+v+w)x^2+(uv+wv+wu)x-uvw,$$

对 $x$ 赋值 $x_i$，求和即有

$$\sum_{i=1}^n(x_i-u)(x_i-v)(x_i-w)$$
$$=\sum_{i=1}^n x_i^3-(u+v+w)-nuvw. \quad ①$$

**证明** 不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

取 $a=x_1,b=x_n,c=x_{n-1},d=x_2$.

在式①中，令

$(u,v,w)=(a,b,c)$ 与 $(a,b,d)$,

即为所求.

**例 10** 给定正整数 $n\geqslant 3$. 求使得下面结论成立的最小整数 $k$，对于平面上任意三点不共线的 $n$ 个点 $A_i(x_i,y_i)$ 及任意 $n$ 个实数 $c_i$，总存在一个次数不超过 $k$ 的二元实系数多项式 $P(x,y)$ 满足 $P(x_i,y_i)=c_i$.

【**分析**】研究题意,从一元的情况入手,当题中均为一元多项式时,即为插值公式.考虑拉格朗日公式的来源:它包含了 $n$ 个可使:

$$f(x_i)=1,$$
$$f(x_1)=\cdots=f(x_{i-1})=f(x_{i+1})$$
$$=\cdots=f(x_n)=0$$

的式子$\frac{(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$,这是插值得以完成的关键.

对于二元多项式,其基本组成是 $ax+by+d$,可考虑用其构造类似于拉格朗日插值公式的式子.

记 $t_i=ax_i+by_i+d_i,t=ax+by+d$.

构造$\frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_n)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_n)}$.

此时发现一个问题,由于 $t_i$ 与 $t$ 中的参数 $a$、$b$、$d$ 是任取的,可以把两个 $t_i$ 结合在一起(事实上,$t-t_i$ 表示一条过$(x_i,y_i)$的直线,当然可以调节 $a$、$b$、$d$,使 $t-t_i$ 同时过 $n$ 个点中的两个).

于是,得到如下构造:

当 $2\nmid n$ 时,令

$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$确定

直线 $l_1:a_1x+b_1y+d_1=0$;

$(x_4,y_4)$、$(x_5,y_5)$确定

直线 $l_2:a_2x+b_2y+d_2=0$;

……

$(x_{n-1},y_{n-1})$、$(x_n,y_n)$确定

直线 $l_k:a_kx+b_ky+d_k=0\ \left(k=\frac{n-1}{2}\right)$.

令 $f_1(x,y)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(a_ix+b_iy+d_i)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(a_ix_1+b_iy_1+d_i)}$,其他 $f_j(x,y)$构造方法完全类似.

再令 $P(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i(x,y)$ 即可.

此时,$\deg P=\frac{n-1}{2}$.

当 $2\mid n$ 时,再任取一点,形成 $n+1$ 个点,同上构造,则有 $\deg P=\frac{n}{2}$.

最后,还需找到 $n$ 个点,说明至少要$\left[\frac{n}{2}\right]$次,其中,$[x]$表示不超过实数 $x$ 的最大整数.为了化归到一元多项式来处理,确定 $y$ 与 $x$ 的一个关系式 $y=x^2$,即可取 $n$ 个点为$(1,1)$,$(2,4)$,$(3,9)$,$\cdots$,$(n,n^2)$.此时,

$$P(x_i,y_i)=P(x_i,x_i^2).$$

若 $\deg P<\left[\frac{n}{2}\right]$,则

一元多项式 $g(x)$的次数

$$\leqslant 2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\leqslant n-2.$$

在$(1,1)$,$(2,4)$,$\cdots$,$(n-1,(n-1)^2)$处赋值为0,得 $g(x)\equiv 0$,再在$(n,n^2)$处赋值为1,矛盾.

综上,$k_{\min}=\left[\frac{n}{2}\right]$.

## 练习题

**1.** 设 $n\geqslant 2$ 是给定的正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是不同的实数,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是正实数,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$.记

$$S=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_kx_k^3-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^3}{3\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_kx_k^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_kx_k\right)^2\right)}.$$

证明:$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$
$\leqslant S\leqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

**提示** 原不等式

$$\Leftrightarrow\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}p_ip_jp_k(x_i+x_j+x_k-3x_1)\cdot$$
$$((x_i-x_j)^2+(x_j-x_k)^2+(x_k-x_i)^2)\geqslant 0.$$

**2.** 已知实数 $a$、$b$、$x$、$y$ 满足方程组:

$$\begin{cases}ax+by=3,\\ax^2+by^2=7,\\ax^3+by^3=16,\\ax^4+by^4=42.\end{cases}$$

求 $ax^5+by^5$ 的值.

**提示** 设

$c=x+y, d=-xy, a_n=ax^n+by^n$.

则 $a_{n+1}=ca_n+da_{n-1}$.

故 $\begin{cases}7c+3d=16,\\16c+7d=42,\\42c+16d=a_5.\end{cases}$

解得 $a_5=20$.

**3.** 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不成比例,实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足:

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$,

$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=1$.

证明:$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

$$\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}.$$

**提示** 由柯西不等式,知对于任意的 $t\in\mathbf{R}$,均有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$
$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(a_it+b_i)x_i\right)^2=1,$$

即 $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(At^2+2Ct+B)-1\geqslant0$ 恒成立.

由 $\Delta\leqslant0$,即有 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{A}{AB-C^2}$.

**4.** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均大于 $-1$ 且同号.证明:

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1a_2\cdots a_n$.

**提示** 令

$x_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-(1+a_1a_2\cdots a_n)$.

则 $x_{n+1}-x_n$

$=a_{n+1}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-a_{n+1}$

$=a_{n+1}((1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1)$.

由 $a_i>-1$ 且同号,故 $x_{n+1}-x_n\geqslant0$.

从而,$x_n\geqslant x_1=0$,即

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1a_2\cdots a_n$.

因为 $a_i$ 不全为0,所以,上式为严格不等式.

**5.** 证明:存在 $f:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{Z}_+$,满足:

$f^{(k)}(n)=n+a(n\in\mathbf{Z}_+)$

的充分必要条件是 $a$ 为非负整数,且 $k\mid a$.

**提示** 充分性.

显然,只需令 $f(x)=x+\frac{a}{x}(x\in\mathbf{Z}_+)$ 即可.

必要性.

由条件,知 $n$ 经 $k$ 次映射后变成 $n+a$.若可以证明 $f(n)>a$,则得证.这是因为每一条链中,$f^{(k-1)}(n)\leqslant a$(否则 $n$ 不是第一个),$f^{(k)}(n)>a$.故 $1,2,3,\cdots,a$ 必为某 $l$ 条链的前 $k$ 个数,即 $a=kl$.事实上,$f(n)>n$ 不一定成立,而上述过程只要证 $j\leqslant k-1$,$f^{(j)}(n)\leqslant a$ 即可.

**6.** 证明:存在正整数 $n$ 及非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得

$$\left|x-\sum_{i=1}^{n}a_ix^{2i+1}\right|<\frac{1}{1\,000}$$

对于所有的 $x\in[-1,1]$ 成立.

**提示** 可将题中不等式写成

$$x\left|1-\sum_{i=1}^{n}a_ix^{2i}\right|=xf(x^2)<\frac{1}{1\,000}. \quad ①$$

这样就保证了偶次项系数为0,当 $x$ 足够小时,式①成立.

当 $x$ 大于某个常数时,希望 $f(x^2)$ 足够小.

于是,构造 $x(1-x^2)^n$.

下面证明存在 $n$ 满足要求.

事实上,当 $x\leqslant\frac{1}{1\,000}$ 时,

$x(1-x^2)^n<\frac{1}{1\,000}$;

当 $x>\frac{1}{1\,000}$ 时,

$$x(1-x^2)^n<(1-x^2)^n<\left(1-\frac{1}{1\,000^2}\right)^n.$$

取 $n$ 使 $\left(1-\frac{1}{1\,000^2}\right)^n<\frac{1}{1\,000}$ 即可.