# 近五年高考数列题型分析及教学建议

◉ 湖北大学数学与统计学院　宁羽杰　王卫华

## 一、课标要求

2017年版课标对数列的要求:通过实际案例,了解数列的概念和表示方法(列表、图象、通项公式),了解数列是一种特殊的函数,理解等差(比)数列的概念和通项公式的意义;探索并掌握等差(比)数列的前$n$项和公式,并理解通项公式与求和公式的关系;在实际情境中辨别出等差(比)数列,并解决问题;体会等差数列与一元一次函数、等比数列与指数型函数之间的关系.

## 二、试题展现

### (一)数列基本量

等差(比)数列包含五个基本量$a_1,a_n,d(q),n,S_n$,在解题时常用列方程组或待定系数法得到关键量——$a_1,d(q)$,进而求解其他未知量.其次,认真审题,了解题目需要求解的具体基本量,仔细观察与分析量与量之间的联系,灵活运用数列的性质与定理,从而进行简便运算.

**例1**　(2017年全国卷Ⅰ,理4)记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和.如果$a_4+a_5=24,S_6=48$,那么$\{a_n\}$的公差为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

### (二)数列通项

**1. 公式法**

等差(比)数列的通项公式$\{a_n\}$通常由首项$a_1$与公差$d$(公比$q$)决定,那么根据题意中两个已知条件列方程组即可求得基本量,从而得到通项.其次,需要牢记数列通项公式:等差数列对应$a_n=a_1+(n-1)d$,等比数列对应$a_n=a_1q^{n-1}$.

**例2**　(2019年全国卷Ⅰ,理9)记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和.已知$S_4=0,a_5=5$,则(　　).

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

**2. 分类讨论法**

分类讨论法即前$n$项和法,在解决该类题型时,利用$a_n$与$S_n$之间的关系:$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$根据已知条件计算、化简,进而求出通项公式$\{a_n\}$,最后再根据实际情况决定是否将$n=1$与$n\geqslant 2$两种情况进行合并.

**例3**　(2021年全国卷Ⅱ,理19)记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和,$b_n$为数列$\{S_n\}$的前$n$项积,已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1)证明:数列$\{b_n\}$是等差数列;

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

### (三)数列求和

**1. 公式法**

等差数列的前$n$项和公式为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$或$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$,在解题时需要根据已知条件选择合适的公式.若已知首项、末项与项数,则选择前者,若已知首项、公差与项数,则选择后者;其次,等比数列的前$n$项和公式为$S_n=\begin{cases}na_1,q=1,\\\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1.\end{cases}$

在解题时注意需要对$q$进行分类讨论.

**2. 裂项相消法**

裂项相消法通常将数列中的某一项拆分成作差的两项,在进行运算时,将大多数互为相反数的项抵消,剩下首尾相对应的一些项,从而进行化简,大大地减少运算量.使用该方法求和时,应留意在运算时哪些项被消掉、哪些项被保留,切不可以漏掉未被消去的项.其中,高考真题中大多考查通项为分式的情形,以下便是常见的裂项公式:

(1)$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$;

(2)$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

(3)$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$
$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$；

(5) $\log_a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\log_a(n+1)-\log_a n$.

**例4** (2017年全国卷Ⅱ,理15)等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,$a_3=3$,$S_4=10$,则$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$______.

**3. 错位相减法**

如果存在一个数列$\{a_nb_n\}$,其中$\{a_n\}$是公差为$d$的等差数列,$\{b_n\}$是公比为$q(q\neq1)$的等比数列.针对这类题目,通用方法：

设$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,(*)

那么$qS_n=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$.(**)

(*)−(**),得$(1-q)S_n=a_1b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_n)-a_nb_{n+1}$,进而两边相除$1-q$,便能得到所需的和.

**例5** (2020年全国卷Ⅰ,理17)设$\{a_n\}$是$q$不为1的等比数列,其中$a_1$是$a_2$,$a_3$的等差中项.

(1)求$\{a_n\}$的公比；

(2)若$a_1=1$,求数列$\{na_n\}$的前$n$项和.

**4. 分组求和法**

根据数列通项的特点,将数列分成若干个能独立求和的数列分别求和.

**(四)数列综合题**

随着教育改革的不断推进,高考数学试题越来越注重数学学科的六大核心素养.针对数列这一知识点,它的试题特点在数列与其他知识点的融合上得以体现.数列既可以考查简单的公式、性质的运用,同时也可以和数学文化、二次函数、不等式等相结合,大大提高试题的难度,综合考查考生各方面的能力.

**1. 数列与数学文化**

**例6** (2020年全国卷Ⅱ,理4)北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所,分上中下三层.上层中心有一块圆形石板(称为天心石),环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环,向外每环依次增加9块.下一层的第一环比上一层的最后一环多9块,向外每环依次也增加9块.已知每层环数相同,且下层比中层多729块,则三层共有扇面形石板(不含天心石)(　　).

图1

A. 3699块　B. 3474块　C. 3402块　D. 3339块

**2. 数列与二次函数**

**例7** (2018年全国卷Ⅱ,文17)记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和,已知$a_1=-7$,$S_3=-15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$S_n$,并求$S_n$的最小值.

**3. 数列与不等式**

**例8** (2019年全国卷Ⅰ,文18)记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和.已知$S_9=-a_5$.

(1)若$a_3=4$,求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$a_1>0$,求使$S_n\geqslant a_n$的$n$的取值范围.

## 三、分析总结

本文分别收录了30套全国高考数学试卷,包含2017—2020年新课标卷(分文理)24套,2021年新高考Ⅰ卷、Ⅱ卷、全国甲乙卷(分文理)6套.

总览这30套试卷,其考查的知识点充分体现新课标对高中生"四基"培养的重视.它不仅注重知识和方法的基础性,即数列的概念、性质、基本量的运算以及多种不同的求和方法,同时也注重考查高中生综合运用、举一反三的能力,即数列与其他知识点相结合的综合题.

(1)自2017年的新课标卷开始,数列每年的考查形式较为固定,大多为三种情况:①两个客观题,分值占10分;②一个解答题,分值占12分;③一个简答题、一个客观题,分值占17分,考查题型大多为前两种,偶尔也考查过三道题,如2019年的新课标Ⅰ卷(理).因此全国高考卷对数列知识点的考查分值总和大多在10—12分,占整张试卷的6%—8%,2021年新高考全国卷亦是如此,具体情况如下：

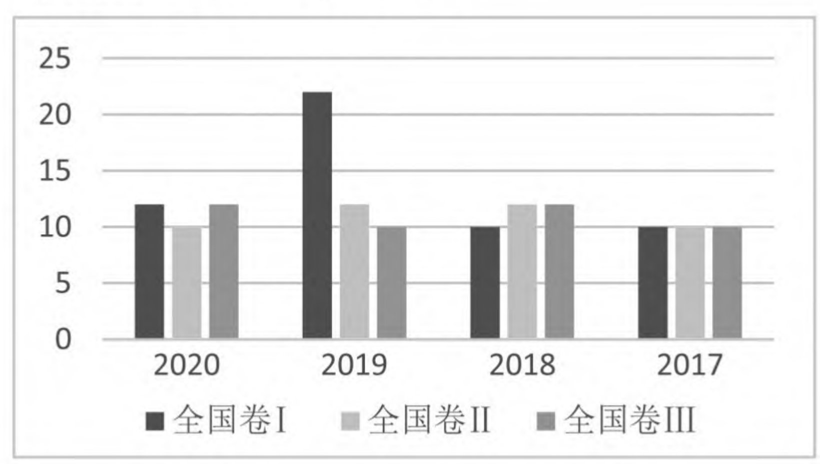


图2　2017—2020年新课标卷(理)

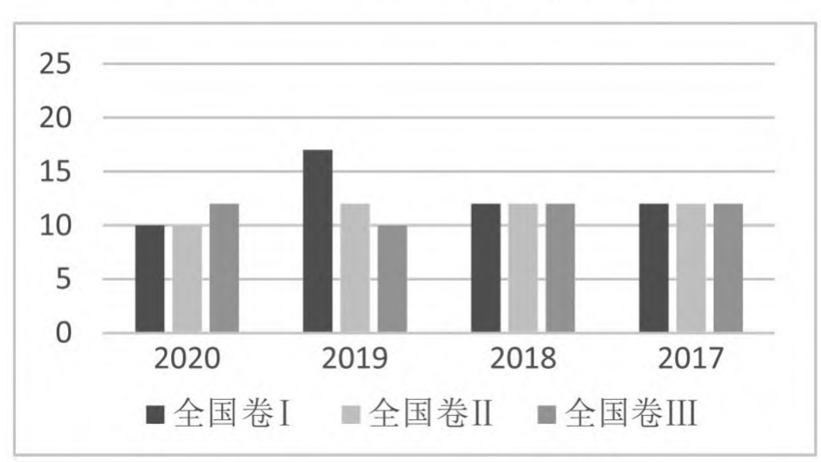


图3　2017—2020年新课标卷(文)

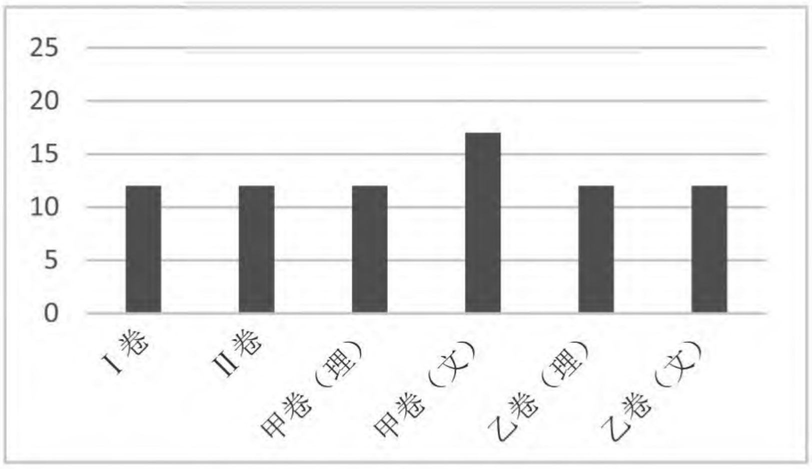


图 4　2021 年新高考全国卷

(2) 选择题的题号位置通常在前 8 题以内，考查的内容大多为等差(比) 数列的概念、性质、通项公式与求和，难度不大，运用基本的公式便能较快解决问题，这充分体现出考纲对该部分知识能力的要求层次——掌握.

(3) 解答题的题号位置通常在第 17 题，即大题的第 1 题，这意味着题目难度不高，考生容易拿分. 其考查内容大多为：第(1) 问求数列的通项公式，第(2) 问利用裂项相消法、错位相减法等方法对数列进行求和. 唯一特殊的就是 2019 年新课标 Ⅰ 卷(理) 解答题第 21 题，它把离散型随机变量及其分布列与递推数列结合在一起考查，综合性、创新性较强，考生对该命题不适应，从而不能正确作答.

(4) 数列的考查难度有难有易，既可以放在选择题前 8 题内，填空题前 2 题内或解答题第 1 题，注重数列的基础知识点. 同时，数列也可以与函数、不等式、概率等进行结合，放在选择题、填空题最后一题压轴考查，使试卷难度增大.

## 四、全国高考数列试题考情预测

2021 年八个省市举行首次“3＋1＋2”新高考模式，所以新高考卷的考查题型与以往大不相同，但是针对数列这一考点，考查题型、考查知识点、考查分值并未出现明显变化，仍比较基础，主要考查数列的相关基础概念与应用，未出现数列与其他知识点相结合的综合题. 因此，本文综合以上汇总分析，对未来的高考数列试题进行一些初步推测：

(1) 数列的概念、性质、通项公式与前 $n$ 项和公式的基本运用与计算，难度较小，十分基础.

(2) 数列解答题考查形式通常为：第(1) 问求数列的通项公式，第(2) 问利用裂项相消法、错位相减法等方法对数列进行求和或是与数列概念、性质相关的简单证明.

(3) 数列与数学文化、二次函数、不等式等其他知识点相结合的综合题，难度较大、创新性较强.

## 五、复习建议

### 1. 注重数列概念的引入与形成

教师在讲授数列的概念时，可以先介绍一下数列的发展史，以故事或情境的形式导入，使学生对数列知识产生较大的兴趣，同时引入与数学文化相关的高考数列题，使学生迅速明白数列概念的重要性，并从思想上有较高的意识. 此外，学习概念要能够掌握它的本质属性，即数列本质上就是定义在正整数集上的离散的函数，因此在学习过程中，教师可以将两者结合起来一同讲解，使学生理解更加深刻.

### 2. 注重数列公式、性质的推导

数学公式、性质反映数学对象与数学概念之间的关系，这些关系一部分可以直接观察分析或者计算测量得来，另一部分则需要理论推导. 在数列这一章中，等差(比) 数列的 $a_n$ 与 $S_n$ 都是推导得来的. 综合分析目前的高考数列题，它的题型越来越灵活，常常与其他知识点综合一起考查，虽然题目实际难度不大，但是由于经过层层包装，学生很难窥探其根本，因此学生十分有必要掌握公式的推导过程，知其所以然.

### 3. 强化基本运算，总结解题方法

数列的学习避免不了有大量的计算，为了减少学生由于计算错误而失分，教师应该做好带头作用，在教学时注意培养学生认真审题的良好习惯，在计算时注意每一个步骤的准确性. 同时，也不可忽视数列试题所涉及到的运算技巧. 在大量的习题练习后，教师可以通过自行传授或课堂上交流讨论的方式，让学生逐渐掌握运算技巧，并有效地运用到试题中.

### 4. 以函数的观点看数列，体会数学的整体性

由于数列是特殊的函数，所以在数列这一章学习中，教师要有意识地引导学生将数列纳入到函数这一大的体系中，将两者结合一并理解. 例如，数列的通项公式对应函数解析式，数列的规律性对应函数变量之间的关系. 如此一来，利用函数的观点去学习数列，学生不仅可以从多个角度认识与理解数列的相关知识，而且也加深对函数的概念与思想方法的领悟，认识到数学是一个整体，体会到数学的魅力与有趣. F