指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 交点个数问题

论题：指数函数 $y=a^x$ $(a>0且a\neq 1)$ **与对数函数** $y=\log_a x$ $(a>0且a\neq 1)$ **交点个数问题.**

分 $a>1$ 及 $0<a<1$ 两种情况进行讨论.

（一）：当 $a>1$ **时**，过原点 $O(0,0)$ 作 $y=a^x$ 的切线 l，设切点为 $P(x_0,y_0)$

$\because y'=a^x\ln a$ $\quad\therefore k_l=y'|_{x=x_0}=a^{x_0}\ln a$

又 $\because k_l=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{a^{x_0}}{x_0}$ $\quad\therefore \dfrac{a^{x_0}}{x_0}=a^{x_0}\ln a$

$\therefore x_0=\dfrac{1}{\ln a}=\log_a e$

从而 $k_l=a^{\log_a e}\ln a=e\ln a$

当 $k_l=1$，即 $e\ln a=1$，亦即 $a=e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$ 时，P 在 $y=x$ 上，$\therefore x_0=y_0$

这样就有 $a^{x_0}=x_0$，$\therefore \log_a x_0=x_0$

$\therefore P(x_0,y_0)$ 是 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的公共点.

当 $k_l>1$,即 $e\ln a>1$，亦即 $a>\sqrt[e]{e}$ 时，$y=a^x$ 与 $y=x$ 相离，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 没有公共点.

当 $k_l<1$,即 $e\ln a<1$，亦即 $1<a<\sqrt[e]{e}$ 时，$y=a^x$ 与 $y=x$ 有两个公共点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，同理可知 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 均是 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的公共点.

引理：当$a>1$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$不可能有不在$y=x$上的公共点.

证明：用反证法.假设$y=a^x$与$y=\log_a x$有公共点$Q(s,t)$，$s,t>0,s\neq t$，

当$s>t$时,$a^s=t$ ①, $\log_a s=t$ ②

由②得$a^t=s$ ③

$\because$ $y=a^x$单增,又$\because$ $s>t$ $\therefore$ $a^s>a^t$由此式结合①③可知$t>s$，

与$s>t$矛盾.

同理当$t>s$时亦矛盾.

从而假设不真.

所以, 引理得证.

由上可知：当$1<a<\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有两个公共点,

当$a=\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有唯一公共点,

当$a>\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$没有公共点.

（二）：当$0<a<1$**时**, 作函数$f(x)=a^x-\log_a x$，

易知$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

不妨设$a=e^m\quad(m<0)$，

则$f(x)=e^{mx}-\dfrac{1}{m}\ln x$，

$$f'(x)=\frac{e^{-mx}-m^2x}{-mxe^{-mx}}$$

过原点作$y=e^{-mx}$的切线,则切线的斜率$k=e\ln e^{-m}=-me$

当$-me\geq m^2$,即$m\geq -e$时, $f'(x)\geq 0$恒成立.从而$f(x)$单增,

$\therefore$ $f(x)$有唯一的零点.

当$-me<m^2$,即$m<-e$时,不妨设$y=e^{-mx}$与$y=m^2x$

交于两点$M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $(x_1<x_2)$

则当$x\in(0,x_1)$时, $f'(x)>0$，当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$,

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$的单增区间为$(0,x_1)$, $(x_2,+\infty)$,单减区间为(x_1,x_2)

$f(x)$在$x=x_1$处取得极大值,且$f(x_1)>0$,

$f(x)$在$x=x_2$处取得极小值,且$f(x_2)<0$,

再由零点存在定理可知，$f(x)$有三个零点,分别在区间$(0,x_1)$, (x_1,x_2), $(x_2,+\infty)$之内.

对上述$f(x_1)>0$及$f(x_2)<0$的结论,可证明如下：

设$y=e^{mx}$ （$m<-e$）与$y=x$的交点为(x_3,x_3)

$\because m<-e$ $\therefore m\cdot\frac{1}{e}<-1$ $\therefore e^{m\cdot\frac{1}{e}}<e^{-1}$

即当$x=\frac{1}{e}$时，$y=e^{mx}$的函数值小于$y=x$的函数值,数形结合可知$x_3<\frac{1}{e}$

$\because y=e^{mx}$ （$m<-e$）与$y=x$的交点为(x_3,x_3)

$\therefore x_3=e^{mx_3}$从而$\ln x_3=mx_3$

于是$f(x_3)=e^{mx_3}-\frac{1}{m}\ln x_3=x_3-\frac{1}{m}mx_3=0$

又$\because$ $f'(x_3)=\dfrac{e^{-mx_3}-m^2x_3}{-mx_3e^{-mx_3}}=\dfrac{\frac{1}{x_3}-m^2x_3}{-mx_3e^{-mx_3}}$

$$=\frac{1-m^2x_3^2}{-mx_3^2e^{-mx_3}}=\frac{(1+mx_3)(1-mx_3)}{-mx_3^2e^{-mx_3}}$$

$\because m<0,x_3>0$，$\therefore 1-mx_3>0$，$-mx_3^2e^{-mx_3}>0$

又$\because x_3<\frac{1}{e}$，$\therefore \ln x_3<-1$，$\therefore 1+mx_3<1+\ln x_3<0$

$\therefore f'(x_3)<0$，又$\because$当$x\in(0,x_1)$时,$f'(x)>0$，当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$，

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$

$\therefore x_3\in(x_1,x_2)$　　又$\because f(x)$在区间(x_1,x_2)单减及$f(x_3)=0$

可知$f(x_1)>0$且$f(x_2)<0$

由上可知：当$m\geq -e$即$e^{-e}\leq a<1$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有唯一公共点,且此公共点在$y=x$上，

当$m<-e$即$0<a<e^{-e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有三个公共点,且有两个不在直线$y=x$上，但关于$y=x$对称，而第三个公共点在直线$y=x$上.

综合上述,我们可以得到如下结论：

当$1<a<\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有两个公共点,且两个公共点均在直线$y=x$上.

当$a=\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有唯一公共点，且该公共点在直线$y=x$上.

当$a>\sqrt[e]{e}$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$没有公共点.

当$e^{-e}\leq a<1$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$有唯一公共点,且此公共点在

$y=x$上，

当$0<a<e^{-e}$时，$y=a^{x}$与$y=\log_{a}x$有三个公共点,且有两个不在直线$y=x$上，但关于$y=x$对称，而第三个公共点在直线$y=x$上.