

江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期高二数学

期中模拟 (1)

一、单项选择题:本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。

1. 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数为 1, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 已知 $\frac{1-i}{z} = 1+i$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 $|z| =$ ()

- A. i B. $-i$ C. 1 D. 2

3. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, 则其单调减区间是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, +\infty)$

4. 若函数 $f(x) = x^3 + e^x - ax$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

5. 设 $(\sqrt{2} - x)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2022}x^{2022}$, 则 $(a_0 + a_2 + \cdots + a_{2022})^2 - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2021})^2 =$ ()

- A. 0 B. -1 C. 1 D. $(\sqrt{2} - 1)^{2022}$

6. 十二生肖, 又叫属相, 依次为鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪. 现有十二生肖的吉祥物各一个, 甲、乙、丙三名同学从中各选一个, 甲没有选择马, 乙、丙二人恰有一人选择羊, 则不同的选法有 ()

- A. 242 种 B. 220 种 C. 200 种 D. 110 种

7. 设 $a \in \mathbb{Z}$, 且 $0 \leq a \leq 16$, 若 $4^{2022} + a$ 能被 17 整除, 则 a 的值为 ()

- A. 1 B. 4 C. 13 D. 16

8. 已知 $a < 5$ 且 $ae^5 = 5e^a$, $b < 4$ 且 $be^4 = 4e^b$, $c < 3$ 且 $ce^3 = 3e^c$, 则 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题意要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的 2 分.

9. 下列说法正确的有 ()

- A. 任意两个复数都不能比大小
- B. 若 $z = a + bi (a \in R, b \in R)$, 则当且仅当 $a = b = 0$ 时, $z = 0$
- C. 若 $z_1, z_2 \in C$, 且 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = 0$
- D. 若复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z + 2i|$ 的最大值为 3

10. 现有 4 个小球和 4 个小盒子, 下面的结论正确的是 ()

- A. 若 4 个不同的小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的盒子, 则共有 24 种放法
- B. 若 4 个相同的小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的盒子, 且恰有两个空盒的放法共有 18 种
- C. 若 4 个不同 小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的盒子, 且恰有一个空盒的放法共有 144 种
- D. 若编号为 1, 2, 3, 4 的小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的盒子, 没有一个空盒但小球的编号和盒子的编号全不相同的放法共有 9 种

11. 已知 $(1 + \frac{a}{x})(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则下列结论正确的有 ()

- A. $a = 1$
- B. 展开式中常数项为 160
- C. 展开式系数的绝对值的和 1458
- D. 若 r 为偶数, 则展开式中 x^r 和 x^{r-1} 的系数相等

12. 设函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = \frac{f'(x)}{x}$, 则下列说法正确的有 ()

- A. 不等式 $g(x) > 0$ 的解集为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$;
- B. 函数 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 单调递减;
- C. 当 $x \in [\frac{1}{e}, 1]$ 时, 总有 $f(x) < g(x)$ 恒成立;
- D. 若函数 $F(x) = f(x) - ax^2$ 有两个极值点, 则实数 $a \in (0, 1)$.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 在 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____.

14. 函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有 2 个不同的极值点, 则实数 a 的取值范围是_____

15. 某地区高考改革, 实行“3+1+2”模式, 即“3”指语文, 数学, 外语三门必考科目, “1”指在物理, 历史两门科目中必选一门, “2”指在化学, 生物, 政治, 地理四门学科中任意选择两门学科, 则一名学生的不同选科组合有_____(用数字作答). 若物理化学不能同时选, 则一名学生的不同选科组合有_____(用数字作答).

16. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 对于给定的正数 K , 定义函数 $f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K \\ K, & f(x) > K \end{cases}$, 取函数

$$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x^2 \ln x, \text{ 若对任意 } x \in (0, +\infty), \text{ 恒有 } f_K(x) = f(x), \text{ 则 } K \text{ 的最小值为} \underline{\hspace{2cm}}.$$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $z_1 = a + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$ (其中 i 为虚数单位).

(1) 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 求实数 a 的值;

(2) 若 $|z_1 - z_2| < |z_1|$ (其中 $\overline{z_2}$ 是复数 z_2 的共轭复数), 求实数 a 的取值范围.

18. 在①函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(\frac{1}{3}, 1)$; ②函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线方程为 $y = 8x + 14$, 且 $b > 0$;

③函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值 10; 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中求解.

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$, 且_____.

(1) 求 a 、 b 的值;

(2) 若 $x \in [-1, 2]$, 求函数 $f(x)$ 的最小值.

19. 某班有 6 名同学报名参加校运会的四个比赛项目, 在下列情况下各有多少种不同的报名方法?

(用数字回答)

(1) 每人恰好参加一项, 每项人数不限;

(2) 每项限报一人, 且每人至多参加一项;

(3) 每人限报一项, 人人参加, 且每个项目均有人参加.

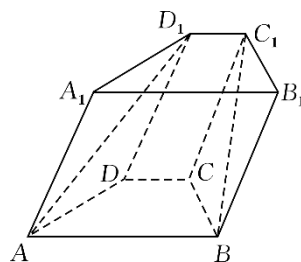
20. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB=2$, $BC=CD=1$,

顶点 D_1 在底面 $ABCD$ 内的射影恰为点 C .

(1) 求异面直线 AD_1 与 BC 所成角的大小;

(2) 若直线 DD_1 与直线 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,

求二面角 D_1-AB-C 的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = (1+x)^n, n \in N^*$.

(1) 当 $n=8$ 时, 求展开式中系数的最大项;

(2) 化简 $C_n^0 2^{n-1} + C_n^1 2^{n-2} + C_n^2 2^{n-3} + \cdots + C_n^n 2^{-1}$;

(3) 定义: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 化简: $\sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i$.

22. 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$,

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x) = x^2 + |f(x)|$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 设 $h(x) = mf(x) - \ln x$, 求证: 当 $0 < m < \frac{1}{e}$ 时, 函数 $h(x)$ 恰有 2 个不同零点.

期中模拟(1) 答案

一、单项选择题: **ACBD CCAD**

二、多项选择题: **BD BCD ACD ACD**

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 15. 14. $(0, \frac{1}{2})$ 15. ①12 , ② 9 16. $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解 (1) 由 $z_1 = a + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$,

$$\text{得 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+2i}{3-4i} = \frac{(a+2i)(3+4i)}{25} = \frac{3a-8}{25} + \frac{4a+6}{25}i,$$

$$\because \frac{z_1}{z_2} \text{ 为纯虚数, } \therefore \frac{3a-8}{25} = 0, \text{ 且 } \frac{4a+6}{25} \neq 0, \therefore a = \frac{8}{3}.$$

$$(2) \ z_1 - \overline{z_2} = (a+2i) - (3+4i) = (a-3) - 2i,$$

$$\because |z_1 - \overline{z_2}| < |z_1|, \therefore |z_1 - \overline{z_2}|^2 < |z_1|^2, \text{ 即 } (a-3)^2 + 4 < a^2 + 4, \text{ 解得 } a > \frac{3}{2}.$$

18. 解: (1) 若选①, 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(\frac{1}{3}, 1)$,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a, \text{ 则 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \text{ 则 } \frac{1}{3}, 1 \text{ 是方程 } 3x^2 + 2ax + b = 0 \text{ 的根,}$$

$$\text{故 } \frac{1}{3} + 1 = -\frac{2a}{3}, \text{ 且 } \frac{1}{3} \times 1 = \frac{b}{3}, \text{ 解得: } a = -2, b = 1;$$

若选②, 函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线方程为 $y = 8x + 14$, 且 $b > 0$,

$$\text{若 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \text{ 则 } f(-1) = -a^2 - 6a - b - 1, f'(-1) = 3 - 2a + b,$$

$$\text{故切线方程是: } y - (-a^2 - 6a - b - 1) = (3 - 2a + b)(x + 1),$$

$$\text{即 } y = (3 - 2a + b)x - a^2 - 8a + 2 = 8x + 14,$$

$$\text{故 } \begin{cases} 3 - 2a + b = 8 \\ -a^2 - 8a + 2 = 14 \end{cases}, \text{ 解得: } a = -2, b = 1;$$

若选③, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \text{ 则 } f'(1) = 0,$$

且 $f(1) = 10$, 则, $a = -2, b = 1$, 或 $a = -6, b = 9$,

当 $a = -2, b = 1$ 时, 当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, 函数递减, 当 $x > 1$ 时, 函数递增,

则函数在 $x = 1$ 处取得极小值, 与题意相符;

当 $a = -6$, $b = 9$ 时, 当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, 函数递增, 当 $x > 1$ 时, 函数递减,

函数在 $x = 1$ 处取得极大值, 不符合题意;

则 $a = -2$, $b = 1$,

(2) 由 (1) 得: $a = -2$, $b = 1$,

则 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 10$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$,

令 $f'(x) > 0$, 解得: $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{3}$,

令 $f'(x) < 0$, 解得: $\frac{1}{3} < x < 1$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{3})$ 递增, 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增,

故 $f(x)$ 在 $[-1, \frac{1}{3})$ 递增, 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 递减, 在 $(1, 2]$ 递增,

而 $f(-1) = 6$, $f(1) = 10$,

故函数 $f(x)$ 的最小值为 6.

19 解: (1) 每人都可以从这四个项目中选报一项, 各有 4 种不同的选法,

由分步计数原理知共有 $4^6 = 4096$ 种.

答: 不同的报名方法有 4096 种.

(2) 每项限报一人, 且每人至多报一项, 因此可由项目选人, 第一个项目有 6 种不同的选法, 第二个项目有 5 种不同的选法, 第三个项目有 4 种不同的选法, 第四个项目有 3 种不同的选法,

由分步计数原理得共有报名方法 $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ 种.

答: 不同的报名方法有 360 种.

(3) 每人限报一项, 人人参加, 且每个项目均有人参加, 因此需将 6 人分成 4 组,

有 $C_6^3 + \frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2} = 20 + \frac{15 \times 6}{2} = 65$ 种.

每组参加一个项目, 由分步计数原理得共有 $(C_6^3 + \frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2}) A_4^4 = 65 \times 24 = 1560$ 种.

答: 不同的报名方法有 1560 种.

20. 解: (1) 连接 D_1C , 则 $D_1C \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore D_1C \perp BC$. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 连接 AC ,

$\because AB = 2$, $BC = CD = 1$, $AB \parallel CD$, $\therefore BC \perp AC$,

$\therefore BC \perp \text{平面 } AD_1C$, $\therefore AD_1 \perp BC$. $\therefore$ 异面直线 AD_1 与 BC 所成角为 90° .

$$(2) \because AB \parallel CD, \therefore \angle D_1DC = \frac{\pi}{3}, \because CD = 1, \therefore D_1C = \sqrt{3}.$$

在底面 $ABCD$ 中作 $CM \perp AB$, 连接 D_1M , 则 $D_1M \perp AB$,

$\therefore \angle D_1MC$ 为二面角 D_1-AB-C 的平面角. 在 $Rt\triangle D_1CM$ 中, $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $D_1C = \sqrt{3}$,

$$\therefore D_1M = \sqrt{CM^2 + D_1C^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \therefore \sin \angle D_1MC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即二面角 } D_1-AB-C \text{ 的正弦值为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

21 解 (1) $f(x) = (1+x)^8$ $\therefore$ 系数最大的项即为二项式系数最大的项

$$T_5 = C_8^4 x^4 = 70x^4$$

$$(2) f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} (C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} + \cdots + C_n^n 2^0) = \frac{1}{2} (1+2)^n = \frac{3^n}{2}$$

$$(3) \sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i = 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n \quad ①$$

$$\sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i = (n+1)C_n^n + nC_n^{n-1} + \cdots + 3C_n^2 + 2C_n^1 \quad ②$$

在①、②添加 C_n^0 , 则得

$$1 + \sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \cdots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n \quad ③$$

$$1 + \sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i = (n+1)C_n^n + nC_n^{n-1} + \cdots + 3C_n^2 + 2C_n^1 + 1C_n^0 \quad ④$$

③+④得:

$$2 \left(1 + \sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i \right) = (n+2) (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n) = (n+2) 2^n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n (i+1)C_n^i = (n+2) 2^{n-1} - 1$$

22 解: (1) 由 $f(x) = (x-1)e^x$, 得 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$, 所以 $f'(1) = e$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)$;

$$(2) g(x) = x^2 + |f(x)| = \begin{cases} x^2 + (x-1)e^x, & x \geq 1, \\ x^2 - (x-1)e^x, & x < 1, \end{cases}$$

当 $x \geq 1$ 时, $g'(x) = 2x + xe^x = x(2+e^x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $[1, +\infty)$,

当 $x < 1$ 时 $g(x) = x^2 - (x-1)e^x$, 所以 $g'(x) = 2x - xe^x = x(2-e^x)$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < \ln 2$; 令 $g'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $\ln 2 < x < 1$,

所以函数的单调增区间为 $(0, \ln 2)$; 单调减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2, 1)$.

综上所述, 函数的单调增区间为 $(0, \ln 2)$ 和 $[1, +\infty)$;

函数的单调减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2, 1)$.

(3) 证明: 由题意知, $F(x) = m(x-1)e^x - \ln x$ 得 $F'(x) = mxe^x - \frac{1}{x} = \frac{mx^2e^x - 1}{x} (x > 0)$,

令 $h(x) = mx^2e^x - 1 (x > 0)$, 当 $0 < m < \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) = (2mx + mx^2)e^x > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $h(1) = me - 1 < 0$, $h(\ln \frac{1}{m}) = (\ln \frac{1}{m})^2 - 1 > 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (1, \ln \frac{1}{m})$, 使得 $h(x_0) = mx_0^2e^{x_0} - 1 = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 故 x_0 是 $h(x) = mx^2e^x - 1 (x > 0)$ 的唯一极值点.

令 $t(x) = \ln x - x - 1$, 当 $x \in (1, +\infty)$, $t'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 所以在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

即当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t(x) < t(1) = 0$, 即 $\ln x < x - 1$,

所以 $F(\ln \frac{1}{m}) = m(\ln \frac{1}{m} - 1)e^{\ln \frac{1}{m}} - \ln(\ln \frac{1}{m}) > 1 - \ln(\ln \frac{1}{m}) = -t(\ln \frac{1}{m}) > 0$,

又因为 $F(x_0) < F(1) = 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一的零点,

所以函数 $F(x)$ 恰有两个零点.