2021届高三湖北十一校第二次联考

数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

1. 已知$\overline{z}\cdot(1+2i)=2-i$，则复数$z=$（　　）

A. -1　　　　B. $-i$　　　　C. i　　　　D. $2+i$

【答案】C

2. 已知$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$，则$\tan\theta=$（　　）

A. 7　　　　B. $\dfrac{4}{3}$　　　　C. $\dfrac{1}{7}$　　　　D. $\dfrac{12}{5}$

【答案】A

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的第5项是$\left(x-\dfrac{1}{x}+2y\right)^6$展开式中的常数项，则$a_2+a_8=$（　　）

A. 20　　　　B. -20　　　　C. 40　　　　D. -40

【答案】D

4. 下列命题错误的是（　　）

A. 两个随机变量的线性相关性越强，相关系数的绝对值越接近于1

B. 设$\xi\sim N\left(1,\cdot\sigma^2\right)$，且$P(\xi<0)=0.2$，则$P\left(1<\xi_{<2}\right)=0.2$

C. 线性回归直线$\hat{y}=bx+a$一定经过样本点的中心$(\overline{x},\overline{y})$

D. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽带越狭窄，其模型拟合的精度越高

【答案】B

5. 设A,B,C,D是同一个半径为6的球的球面上四点，且ABC是边长为9的正三角形，则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为（　　）

A. $\dfrac{81\sqrt{2}}{4}$　　　　B. $\dfrac{81\sqrt{3}}{4}$　　　　C. $\dfrac{243\sqrt{2}}{4}$　　　　D. $\dfrac{243\sqrt{3}}{4}$

【答案】D

6. 已知非空集合A，B满足以下两个条件：（1）$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，$A\cap B=\varnothing$；（2）A的元素个数不是A

中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素.则有序集合对 (A,B) 的个数为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

7. 直线 $x-y+1=0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F，交椭圆于 A 、B 两点，交 y 轴于 C 点，若 $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AC}$，则该椭圆的离心率是（　　）

A. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　　C. $2\sqrt{2}-2$　　　　D. $\sqrt{2}-1$

【答案】A

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2+3\ln x, x\geq 1\\ x+1, x<1\end{cases}$，若 $m\neq n$，且 $f(m)+f(n)=4$，则 $m+n$ 的最小值是（　　）

A. 2　　　　B. $e-1$　　　　C. $4-3\ln 3$　　　　D. $3-3\ln 2$

【答案】C

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 一个口袋中有大小形状完全相同的 3 个红球和 4 个白球，从中取出 2 个球.下面几个命题中正确的是（　　）

A. 如果是不放回地抽取，那么取出两个红球和取出两个白球是对立事件

B. 如果是不放回地抽取，那么第 2 次取到红球的概率一定小于第 1 次取到红球的概率

C. 如果是有放回地抽取，那么取出 1 个红球 1 个白球的概率是 $\frac{24}{49}$

D. 如果是有放回地抽取，那么在至少取出一个红球的条件下，第 2 次取出红球的概率是 $\frac{7}{11}$

【答案】CD

10. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)++\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，且过点 $(0,\sqrt{2})$，则下列正确的为（　　）

A. $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

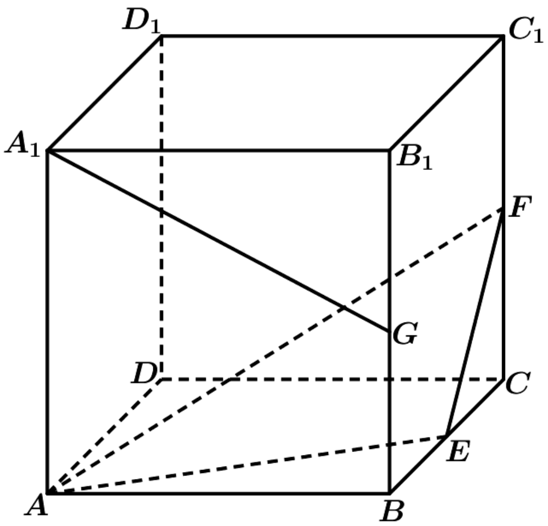
B. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减

C. $f(|x|)$ 的周期为 π

D. 把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位得到的函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$

【答案】BC

11. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2, E, F, G$ 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点.则（　　）



A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$

D. 点 A_1 和点 D 到平面 AEF 的距离相等

【答案】BCD

12. 数学中的很多符号具有简洁、对称的美感，是形成一些常见的漂亮图案的基石，也是许多艺术家设计作品的主要几何元素.如我们熟悉的 ∞ 符号，我们把形状类似 ∞ 的曲线称为“∞ 曲线”.经研究发现，在平面直角坐标系 xOy 中，到定点 $A(-a,0)$， $B(a,0)$ 距离之积等于 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹 C 是“∞ 曲线”.若点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 是轨迹 C 上一点，则下列说法中正确的有（　　）

A. 曲线 C 关于原点 O 中心对称；

B. x 的取值范围是 $[-a,a]$；

C. 曲线 C 上有且仅有一个点 P 满足 $|PA|=|PB|$；

D. PO^2-a^2 的最大值为 $2a^2$.

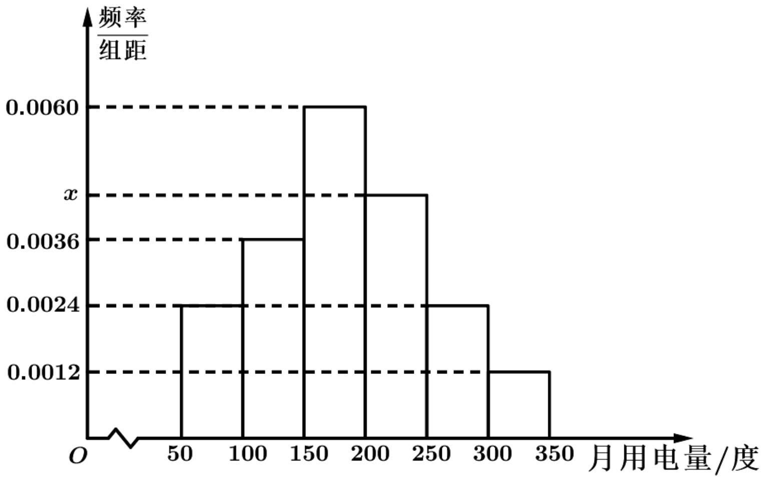
【答案】AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

14. 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查，发现其用电量都在 50 到 350 度之间，频率分布直方图如下图所示，



直方图中的x值为______________.

【答案】0.0044

15. 写出一个渐近线的倾斜角为60°且焦点在y轴上的双曲线标准方程___________.

【答案】$\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$(答案不唯一)

16. 已知不等式$(2ax-\ln x)\left[x^2-(a+1)x+1\right]\geq 0$对任意$x>0$恒成立，则实数$a$的取值范围是

___________.

【答案】$\left[\dfrac{1}{2e},1\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，$AB=2$，$BD=5$.

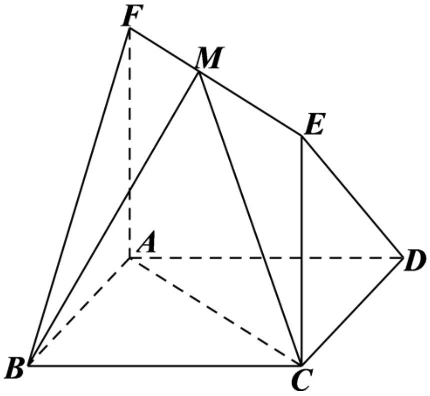
（1）求$\cos\angle ADB$；

（2）若$DC=2\sqrt{2}$，求BC.

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{23}}{5}$；（2）5.

18. 如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，四边形$ACEF$　矩形，平面

$ACEF \perp$平面$ABCD$，$AF=1$，点M在线段EF上运动.



（1）当$AE \perp DM$时，求点M的位置；

（2）在（1）的条件下，求平面MBC与平面ECD所成锐二面角的余弦值.

【答案】（1）M为EF的中点，理由见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

19. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=2n+1\left(n\in N^*\right)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，是否存在正整数$m$、$k\left(1<m<k\right)$，使得$S_k=4S_m^2$？若存在，求出$m$、$k$的值；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）$a_n=n$；（2）不存 ，理由见解析.

20. 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型，在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃，让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下，小球在下落的过程中与层层小木块碰撞，且等可能向左或向右滚下，最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内.如图 1 所示的高尔顿板有 7 层小木块，小球从通道口落下，第一次与第 2 层中间的小木块碰撞，以$\dfrac{1}{2}$的概率向左或向右滚下，依次经过 6 次与小木块碰撞，最后掉入编号为 1，2，…，7 的球槽内.例如小球要掉入 3 号球槽，则在 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚下.

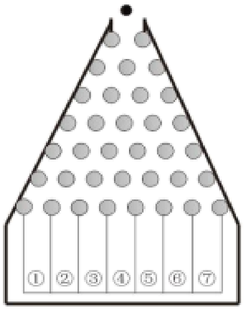


图 1

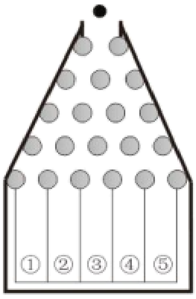


图 2

（1）如图 1，进行一次高尔顿板试验，求小球落入 5 号球槽　概率；

（2）小红、小明同学在研究了高尔顿板后，利用高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动.小红使用图 1 所示的高尔顿板，付费 6 元可以玩一次游戏，小球掉入 m 号球槽得到的奖金为 ξ 元，其中 $\xi=|16-4m|$.

小明改进了高尔顿板(如图 2)，首先将小木块减少成 5 层，然后使小球在下落的过程中与小木块碰撞时，有 $\frac{1}{3}$ 的概率向左，$\frac{2}{3}$ 的概率向右滚下，最后掉入编号为 1，2，……，5 的球槽内，改进高尔顿板后只需付费 4 元就可以玩一次游戏，小球掉入 n 号球槽得到的奖金为 n 元，其中 $\eta=(n-4)^2$.两位同学的高尔顿板游戏火爆进行，很多同学参加了游戏，你觉得小红和小明同学谁的盈利多？请说明理由.

【答案】（1）$\frac{15}{64}$；（2）小明　盈利多，理由见解析.

21. 已知动点 P 在 x 轴及其上方，且点 P 到点 $F(0,1)$ 的距离比到 x 轴的距离大 1.

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）若点 Q 是直线 $y=x-4$ 上任意一点，过点 Q 作点 P 的轨迹 C 的两切线 QA、QB，其中 A、B 为切点，试证明直线 AB 恒过一定点，并求出该点的坐标.

【答案】（1）$x^2=4y$；（2）证明见解析，定点 $(2,4)$

22. 已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+b}{e^x}$ 在 $x=2$ 时取到极大值 $\frac{4}{e^2}$.

（1）求实数 a、b 的值；

（2）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $g(x)=\min\left\{f(x),x-\frac{1}{x}\right\}(x>0)$，若函数 $h(x)=g(x)-tx^2$ 为增函数，求实数 t 的取值范围.

【答案】（1）$a=1$，$b=0$；（2）$(-\infty,-\frac{1}{2e^3})$.