

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学寒假自主练习 (8)

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-x+2}\}$, $B = \{x | y = \log_2(3-2x)\}$, 则有 ()

A. $A \cup B = \left\{x \left| x < \frac{3}{2} \right.\right\}$ B. $A \cup B = \{x | x < 2\}$

C. $A \cap B = \left\{x \left| x < \frac{3}{2} \right.\right\}$ D. $A \cap B = \{x | x \leq 2\}$

2. 若复数 $z = \frac{1+2i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z}$ 在复平面对应的点所在象限为 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 条件 $p: x^2 < x$, 条件 $q: \frac{1}{x} > 1$, 则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 数列 $\{F_n\}$: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n > 2)$, 最初记载于意大利数学家斐波那契在 1202 年所著的《算盘全书》. 若将数列 $\{F_n\}$ 的每一项除以 2 所得的余数按原来项的顺序构成新的数列 $\{a_n\}$, 则数列

$\{a_n\}$ 的前 50 项和为

A. 33

B. 34

C. 49

D. 50

5. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 若 $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $AB = 6$, $AC = 4$,

则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ()

A. -5

B. -10

C. 10

D. 5

6. 已知变量 x, y 之间的一组数据如下表:

x	1	2	3	4	5
y	3.4	7.5	9.1	13.8	m

若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 3x + 1$, 则 m 的值为

A. 16

B. 16.2

C. 16.4

D. 16.6

7. 设 P 为直线 $3x - 4y + 4 = 0$ 上的动点, PA, PB 为圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, A, B 为切点, 则四边形 $APBC$ 面积的最小值为

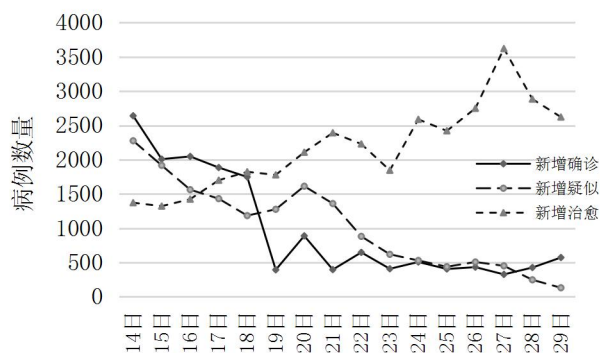
- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, 实数 m, n 满足不等式 $f(2m-n) + f(2-n) > 0$, 则下列不等关系成立的是

- A. $m+n > 1$ B. $m+n < 1$ C. $m-n > -1$ D. $m-n < -1$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 2020 年春节前后, 一场突如其来的新冠肺炎疫情在全国蔓延. 疫情就是命令, 防控就是责任. 在党中央的坚强领导和统一指挥下, 全国人民众志成城、团结一心, 掀起了一场坚决打赢疫情防控阻击战的人民战争. 右侧的图表展示了 2 月 14 日至 29 日全国新冠肺炎疫情变化情况, 根据该折线图, 下列结论正确的是



- A. 16 天中每日新增确诊病例数量呈下降趋势且 19 日的降幅最大
- B. 16 天中每日新增确诊病例的中位数小于新增疑似病例的中位数
- C. 16 天中新增确诊、新增疑似、新增治愈病例的极差均大于 2000
- D. 19 日至 29 日每日新增治愈病例数量均大于新增确诊与新增疑似病例之和

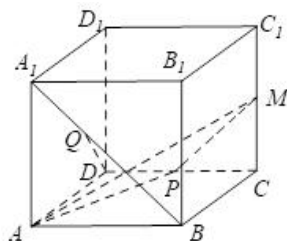
10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F 、 E , 直线 $x = m$ ($-1 < m < 1$) 与椭圆相交于点 A 、

B , 则 ()

- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 存在 m , 使 $\triangle FAB$ 为直角三角形
- C. 存在 m , 使 $\triangle FAB$ 的周长最大 D. 当 $m = 0$ 时, 四边形 $FBEA$ 面积最大

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P, M 分别为棱 CD, CC_1 的中点, Q 为面对角线 A_1B 上任一点, 则下列说法正确的是

- A. 平面 APM 内存在直线与 A_1D_1 平行
- B. 平面 APM 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得截面面积为 $\frac{9}{8}$
- C. 直线 AP 和 DQ 所成角可能为 60°
- D. 直线 AP 和 DQ 所成角可能为 30°



12. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $g(x) = f'(x)$ 的极小值为 1
- B. 函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增
- C. $\exists x_0 \in (-2, -1)$, 使得 $f'(x_0) = -\frac{1}{2}x_0$
- D. 若 $\forall x < 0$, $f(x) < -\frac{1}{4}x^2 + a$ 恒成立, 则整数 a 的最小值为 2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 α 是第一象限角, 且 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

14. 已知 $x + 2y = xy (x > 0, y > 0)$, 则 $2x + y$ 的最小值为 _____.

15. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上, 若 $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{6}$, $AB \perp AC$, $AA_1 = 8$, 则球的表面积为 _____.

16. 已知 F 为抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 点 $A(1, p)$, M 为抛物线上任意一点, $|MA| + |MF|$ 的最小值为 3, 则抛物线方程为 _____, 若线段 AF 的垂直平分线交抛物线于 P, Q 两点, 则四边形 $APFQ$ 的面积为 _____. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三内角, 且其对边分别为 a, b, c , 若 $a \cos C + (c + 2b) \cos A = 0$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, $b + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = b_4$, _____, $b_2 = 8$, $b_1 - 3b_3 = 4$, 是否存在正整数 k , 使得数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 k 项和 $T_k > \frac{15}{16}$, 若存在, 求出 k 的最小值; 若不存在, 说明理由.

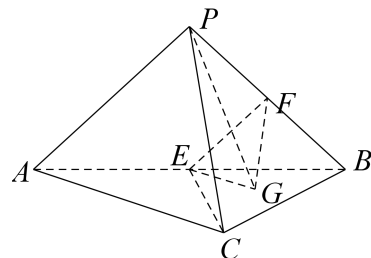
从① $S_4 = 20$, ② $S_3 = 2a_3$, ③ $3a_3 - a_4 = b_2$ 这三个条件中任选一个, 补充到上面问题中并作答.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (12 分) 如图, 三棱锥 $P - ABC$ 中, 点 E, F 分别是 AB, PB 的中点, 点 G 是 $\triangle BCE$ 的重心.

(1) 证明: $GF \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 若平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , $PA = PB$, $PA \perp PB$, $AC \perp BC$, $AB = 2BC$, 求平面 EFG 与平面 PFG 所成的锐二面角的余弦值.



20. (12分)某相关部门推出了环境执法力度的评价与环境质量的评价系统，每项评价只有满意和满意两个选项，市民可以随意进行评价，某工作人员利用随机抽样的方法抽取了 200 位市民的信息，发现对环境质量满意的占 60%，对执法力度满意的占 75%，其中对环境质量与执法力度都满意的有 80 人.
- (1) 是否可以在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下，认为环境质量与执法力度有关？
- (2) 为了改进工作作风，针对抽取的 200 位市民，对执法力度不满意的人抽取 3 位征求意见，用 ξ 表示 3 人对环境质量与执法力度都不满意的人数，求 ξ 的分布列与均值.

参考数据及公式：

$P(K^2 \leq k)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

21. (12 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的焦点重合，且直线 $y = \frac{b}{a}x$ 与圆 $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ 相切.

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设斜率为 k 且不过原点的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点， O 为坐标原点，直线 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，若 k_1, k, k_2 成等比数列，推断 $|OA|^2 + |OB|^2$ 是否为定值？若是，求出此定值；若不是，说明理由.

22. (12 分)已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} - a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围，并证明：对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都

$$有 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1);$$

- (2) 设 $g(x) = (x-1)^2 e^x$ ，讨论方程 $f(x) = g(x)$ 实数根的个数.