综合小练（3）

一、选择题

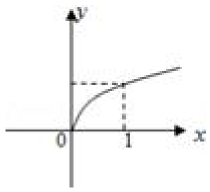
1. 关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant 0$ 的解集是空集，则实数 a 的范围为（　　）

A. $(-2,\frac{6}{5})$　　B. $[-2,\frac{6}{5})$　　C. $[-2,\frac{6}{5}]$　　D. $\left[-\frac{33}{8},-1\right]$

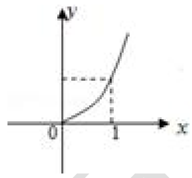
2. 若 $f(x)=\begin{cases}f(x+1),x<4\\2^x,x\geq 4\end{cases}$，则 f（$\log_2 3$）=（　　）

A. -23　　B. 11　　C. 19　　D. 24

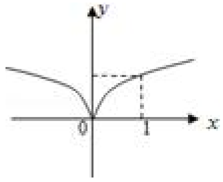
3. 已知函数 f（x）=$a^{x-16}+7$（a＞0 且 a≠1）的图象恒过定点 P，若定点 P 在幂函数 g（x）的图象上，则幂函数 g（x）的图象是



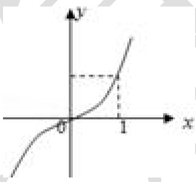
A.



B.



C.



D.

4. 已知 f（x）=lg（10+x）+lg（10−x），则 f（x）是（　　）

A. f(x)是奇函数，且在(0,10)是增函数
B. f(x)是偶函数，且在(0,10)是增函数
C. f(x)是奇函数，且在(0,10)是减函数
D. f(x)是偶函数，且在(0,10)是减函数

二、填空题

5. 函数 $f(x)=\sqrt{-1-\ln x}$ 的定义域是________________.

6. 不等式 $\frac{ax}{x-1}<1$ 的解集为 $\{x|x<b$ 或 $x>3\}$，那么 $a-b$ 的值等于________________.

7. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2\ ,\ 4]$，则 $f(3x-4)$ 的定义域为________________.

8. 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-2ax)$ 在 $[3,4]$ 上为增函数，则 a 的取值范围是________________.

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{x|0<ax+1\leqslant 5\}$，$B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$.

(1) 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围；

(3) 集合 A，B 能否相等？若能，求出 a 的值；若不能，请说明理由.

10. 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{2m-x}{2+x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 为奇函数，且 $f(1)=-1$.

(1) 求实数 a 与 m 的值；

(2) 用定义证明函数 $f(x)$ 的单调性；

(3) 解不等式 $f(\frac{1}{2^x})+1<0$.

11．定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式；

(2) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上的单调性；

(3)) 当 $x\in(0,1]$ 时, 方程 $\dfrac{2^x}{f(x)}-2^x-m=0$ 有解, 试求实数 m 的取值范围.

12．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+1$（$x\in R$），　$(a，b$为实数$)$．

（1）若 $f(1)=0$，且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，求 $f(x)$ 的表达式；

（2）在（1）的条件下，若关于 x 方程 $\left|f(x+1)-1\right|=m\left|x-1\right|$ 只有一个实数解，求实数 m 的取值范围；

（3）在（1）的条件下，求函数 $h(x)=2f(x+1)+x|x-m|+2m$ 最小值．

综合小练（3）答案解析

一、选择题

1.关于x的不等式$(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant 0$的解集是空集,则实数$a$的范围为(　　　)

A. $(-2,\frac{6}{5})$　　　B. $[-2,\frac{6}{5})$　　　C. $[-2,\frac{6}{5}]$　　　D. $\left[-\frac{33}{8},-1\right]$

【参考答案】 B

解：①当$a^2-4=0$,解得$a=2$或$a=-2$,当$a=2$时,不等式的解集为$x\geqslant\frac{1}{4}$,不符合题意；

当$a=-2$时,代入不等式得$-1\geqslant 0$不成立,故$a=-2$符合题意；

②当$a^2-4\neq 0$时,令$f(x)=(a^2-4)x^2+(a+2)x-1$，$f(x)\geqslant 0$解集为空集,则有$\begin{cases}a^2-4<0\\ \Delta=(a+2)^2+4(a^2-4)<0\end{cases}$解得$-2<a<\frac{6}{5}$,

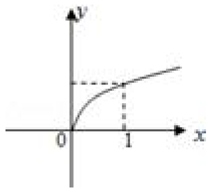
由①②可得$-2\leqslant a<\frac{6}{5}$,选$B$.

2.若$f(x)=\begin{cases}f(x+1),x<4\\ 2^x,x\geq 4\end{cases}$，则f（$\log_2 3$）=（　　）

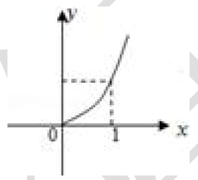
A. -23　　　B. 11　　　C. 19　　　D. 24

【参考答案】D

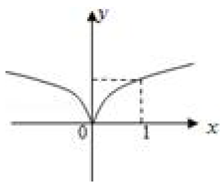
3.已知函数f（x）=a^{x-16}+7（a＞0且a≠1）的图象恒过定点P，若定点P在幂函数g（x）的图象上，则幂函数g（x）的图象是



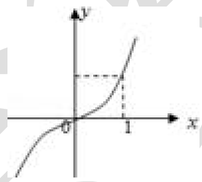
A.



B.



C.



D.

【参考答案】A

解：由指数函数的性质可知P（16,8），∴$8=16^{\alpha}$，∴$\alpha=\frac{3}{4}$，∴g（x）=$x^{\frac{3}{4}}$，∴其图象是A.故选A.

4.已知f（x）=lg（10+x）+lg（10-x），则f（x）是（　　）

A. f(x)是奇函数，且在(0,10)是增函数
B. f(x)是偶函数，且在(0,10)是增函数
C. f(x)是奇函数，且在(0,10)是减函数
D. f(x)是偶函数，且在(0,10)是减函数

【参考答案】D

解：由$\begin{cases}10+x>0\\ 10-x>0\end{cases}$得：x∈（-10，10），　故函数f（x）的定义域为（-10，10），关于原点对称，

又由f（-x）=lg（10-x）+lg（10+x）=f（x），故函数f（x）为偶函数，

而f（x）=lg（10+x）+lg（10-x）=lg（$100-x^2$），y=$100-x^2$在（0，10）递减，y=lgx在（0，10）递增，

故函数f（x）在（0，10）递减，故选D.

二、填空题

5. 函数$f(x)=\sqrt{-1-\ln x}$的定义域是________________.　　**【参考答案】**（0，$\frac{1}{e}$]

6.不等式$\frac{ax}{x-1}<1$的解集为$\{x|x<b$或$x>3\}$,那么$a-b$的值等于________________.　　**【参考答案】**$-\frac{1}{3}$

解：依题意得3是方程$\frac{ax}{x-1}=1$的解,$\therefore 3a=3-1=2$,$\therefore a=\frac{2}{3}$,$\therefore$由$\frac{\frac{2}{3}x}{x-1}<1$,解得：$x>3$或$x<1$,故$b=1$,

故$a-b=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$,故答案为：$-\frac{1}{3}$.

7.已知$f(x)$的定义域为$[-2\ ,\ 4]$,则$f(3x-4)$的定义域为________________.　　**【参考答案】**$\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]$

解：$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,\ 4]$，$\therefore$ 由 $-2\leqslant 3x-4\leqslant 4$ 得 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8}{3}$，

$\therefore$ 函数 $f(3x-4)$ 的定义域为 $\left[\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right]$．故答案为 $\left[\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right]$．

8. 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-2ax)$ 在 $[3,4]$ 上为增函数，则 a 的取值范围是________________.

【参考答案】 $(1,\frac{3}{2})$

解：由题意可得 $g(x)=x^2-2ax$ 的对称轴为 $x=a$．

①当 $a>1$ 时，由复合函数的单调性可知，$g(x)$ 在 $[3,4]$ 单调递增，且 $g(x)>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立，

则 $\begin{cases} a>1 \\ 9-6a>0 \\ a\leqslant 3\end{cases}$，$\therefore 1<a<\frac{3}{2}$．

②$0<a<1$ 时，由复合函数的单调性可知，$g(x)$ 在 $[3,4]$ 上单调递减，且 $g(x)>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立，

则 $\begin{cases} 0<a<1 \\ a\geqslant 4 \\ 16-8a>0\end{cases}$，此时 a 不存在．

综上可得，$1<a<\frac{3}{2}$．

故答案为 $(1,\frac{3}{2})$．

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{x|0<ax+1\leqslant 5\}$，$B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$．

(1) 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围；

(3) 集合 A，B 能否相等？若能，求出 a 的值；若不能，请说明理由．

解：(1) 当 $a=0$ 时，不符合题意，舍去．

当 $a<0$ 时，因为 $A=\left\{x\middle|\frac{4}{a}\leq x<-\frac{1}{a}\right\}$，

又 $A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}\frac{4}{a}>-\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{a}\leq 2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a<-8, \\ a\leq-\frac{1}{2},\end{cases}$

所以 $a<-8$；

当 $a>0$ 时，因为 $A=\left\{x\middle|-\frac{1}{a}<x\leq\frac{4}{a}\right\}$，

又 $A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant-\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{a}\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 2$．

综上所述，当 $A\subseteq B$ 时，实数 a 的取值范围是 $\{a|a<-8$ 或 $a\geqslant 2\}$．

(2) 当 $a=0$ 时，符合题意．

当 $a<0$ 时，$\begin{cases}\frac{4}{a}\leq-\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{a}>2,\end{cases}$ 所以 $-\frac{1}{2}<a<0$；

当 $a>0$ 时，$\begin{cases}-\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{a}\geqslant 2,\end{cases}$ 所以 $0<a\leqslant 2$．

综上所述，当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $\left\{a\middle|-\frac{1}{2}<a\leq 2\right\}$．

(3) 由 (1)(2) 知，当且仅当 $a=2$ 时，$A=B$．

10. 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{2m-x}{2+x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 为奇函数，且 $f(1)=-1$．

(1) 求实数 a 与 m 的值；

(2) 用定义证明函数 $f(x)$ 的单调性；
(3) 解不等式 $f(\frac{1}{2^x})+1<0$.

解： (1) $m=1$, $\therefore f(x)=\log_a\frac{2-x}{2+x}$,
又 $f(1)=-1$, $\therefore \log_a\frac{1}{3}=-1$, 解得 $a=3$ ；
(2) 易得函数 $f(x)=\log_3\frac{2-x}{2+x}$ 的定义域为 $(-2,2)$,
任取 x_1 , $x_2\in(-2,2)$, 且 $x_1<x_2$,
则 $f(x_1)-f(x_2)=\log_3\frac{2-x_1}{2+x_1}-\log_3\frac{2-x_2}{2+x_2}=\log_3\frac{(2-x_1)(2+x_2)}{(2+x_1)(2-x_2)}>\log_3\frac{(2-x_1)(2+x_1)}{(2+x_1)(2-x_1)}=\log_3 1=0$,
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减；
(3) 不等式 $f(\frac{1}{2^x})+1<0$ 可化为 $f(\frac{1}{2^x})<-1$, 可化为 $f(\frac{1}{2^x})<f(1)$,
由 (2) 知函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减,
$\therefore 1<\frac{1}{2^x}<2$, 解得 $-1<x<0$,
$\therefore$ 不等式 $f(\frac{1}{2^x})+1<0$ 的解集为 $\{x|-1<x<0\}$.

11. 定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足当 $0<x\leqslant 1$ 时, $f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$,
(1) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式；
(2) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上的单调性；
(3)) 当 $x\in(0,1]$ 时, 方程 $\frac{2^x}{f(x)}-2^x-m=0$ 有解, 试求实数 m 的取值范围.

解： (1) 设 $x\in[-1,0)$, 则 $-x\in(0,1]$, $f(-x)=\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=\frac{2^x}{1+4^x}$,
$\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x)=-f(x)$, $\therefore f(x)=-\frac{2^x}{1+4^x}$,

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{2^x}{1+4^x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\\ -\frac{2^x}{1+4^x}, x\in[-1,0)\end{cases};$$

(2) 设 $-1\leqslant x_1<x_2<0$,
$\therefore f(x_1)-f(x_2)=-\frac{2^{x_1}}{1+4^{x_1}}+\frac{2^{x_2}}{1+4^{x_2}}=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})(2^{x_1+x_2}-1)}{(1+4^{x_1})(1+4^{x_2})}$,
$\because x_1<x_2$, $\therefore 2^{x_1}-2^{x_2}<0$, $-2<x_1+x_2<0$,
$\therefore 2^{x_1+x_2}-1<0$, $\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$,
$\therefore f(x)$ 在 $[-1,0)$ 递减；
(3) 方程 $\frac{2^x}{f(x)}-2^x-m=0$ 有解, 即 $m=4^x+1-2^x$ 在 $(0,1]$ 上有解,
令 $2^x=t$, $t\in(1,2]$, $t^2-t+1\in(1,3]$,
$\therefore m\in(1,3]$.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ （ $x\in R$ ）， $(a，b为实数)$.
（1）若 $f(1)=0$ ，且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$ ，求 $f(x)$ 的表达式；
（2）在（1）的条件下，若关于 x 方程 $\left|f(x+1)-1\right|=m\left|x-1\right|$ 只有一个实数解，求实数 m 的取值范围；
（3）在（1）的条件下，求函数 $h(x)=2f(x+1)+x|x-m|+2m$ 最小值.

解： (1) 显然 $a\neq 0$　　　$f(1)=0$ $\therefore a+b+1=0$
因为 $x\in R$, 且 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$　$\therefore \Delta=b^2-4a=0$

$$由\begin{cases}a+b+1=0\\ b^2-4a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}\quad\therefore f(x)=x^2-2x+1$$

(2) 方程 $|f(x+1)-1|=g(x)$ ，即 $|x^2-1|=m|x-1|$ ，变形得 $|x-1|(|x+1|-m)=0$ ，
而 $x=1$ 已是该方程的根，
欲原方程只有一解，即要求方程 $|x+1|=m$ ，有且仅有一个等于 1 的解或无解，
结合图形得 $m<0$.

（3）①当 $x \geq m$ 时，$h(x)=3x^2-mx+2m$

(I) 如果 $m \geq 0$，$h(x)_{\min}=h(m)=2m^2+2m$；

(II) 如果 $m<0$，$h(x)_{\min}=h(\frac{m}{6})=2m-\frac{m^2}{12}$；

②当 $x \leq m$ 时，$f(x)=x^2+mx+2m$

(I) 如果 $m \geq 0$，$h(x)_{\min}=h(-\frac{m}{2})=-\frac{m^2}{4}+2m$；

(II) 如果 $m<0$，$h(x)_{\min}=h(m)=2m^2+2m$；

由于 $2m^2+2m-(-\frac{m^2}{4}+2m) \geq 0$ ，$2m-\frac{m^2}{12}-(2m^2+2m) \leq 0$

所以 $h(x)_{\min}=\begin{cases} 2m-\frac{m^2}{4}, m \geq 0 \\ 2m-\frac{m^2}{12}, m<0. \end{cases}$