数学解题的水平划分

罗增儒(陕西师范大学数学与信息科学学院)

摘　要:从能得出题目答案开始算,数学解题可以分为四个水平。如果只会记忆模仿那是"水平1",如果能够完成变式练习那是"水平2",如果能够通过解题获得思维感悟那是"水平3",如果能自觉通过解题分析增强数学理解、提高数学素养那是"水平4"。辅以实例说明解题水平的划分。

关键词:记忆模仿;变式练习;自发领悟;自觉理解

文章编号:1002-2171(2020)3-0002-03

回顾我从当学生到当教师的几十年解题实践(特别是当教师以来的40年),我看到了一条清晰的"学解题、教解题"的线路:由"记忆模仿、变式练习"开始,经过长期的"自发领悟",进入到"自觉理解"的阶段。这里的四个关键词:模仿、练习、领悟、理解,正好体现为数学解题的四个水平。

如果题目不会解、解不出来那就还没有显示出水平(0水平)。从能得出题目答案开始算,如果只会记忆模仿那是"水平1",如果能够完成变式练习那是"水平2",如果能够通过解题获得思维感悟那是"水平3",如果能自觉通过解题分析增强数学理解、提高数学素养那是"水平4"。在此,我仅将其作为"一个中国解题者的学习案例"或"一个中国学习者的解题案例"总结为经验性的认识(辅有具体案例),就教于广大数学同行。

1　学解题的四个水平划分

1.1　数学解题的记忆模仿阶段(水平1)

这一阶段的表现是,模仿教师或教科书的示范去解决一些识记性的问题,能套定理公式,但稍一变化就会思维受阻;解题常常只是为了完成任务,解题的目的就是获得答案;题目解完之后没有反思自己是怎么想的,也说不清用了哪些知识、哪些方法。

这一阶段,记忆是一项重要的内容,由记到忆,是指信息的巩固与输出的流畅,要解决好:记忆的敏捷性(记得快),记忆的持久性(记得牢或忘得慢),记忆的准确性(记得准),记忆的准备性(便于提取)。仅仅停留在这一阶段的记忆主要是机械记忆,缺少自觉的理解记忆。

记忆和模仿都是必要的,学写字从模仿开始,学写作从模仿开始,学绘画从模仿开始,学音乐、舞蹈也都从模仿开始,每节课后的数学作业基本上都是模仿性练习。波利亚教授在《数学的发现》的序言中说:"解题只能通过模仿和实践来学到它。"张景中院士在《帮你学数学》(第46页)中说:"模仿是学习的开始。"至于"不要死记硬背"的告诫,也不是要否定"记",而是要否定"死",不是要否定"背",而是要否定"硬"。

但是,仅仅停留在记忆模仿阶段是不够的,还需要领悟和理解。有些学生对于课堂上讲的内容还能够听懂,课后作业常常遇到困难,个别教师对于课堂上讲过的题目,过了几周学生来问时,自己都不会了,就是由于他们的数学解题仍停留在记忆模仿的水平。

1.2　数学解题的变式练习阶段(水平2)

这一阶段的表现是,做数量足够、形式变化的习题,本质上是进行操作性活动与初步应用。其作用首先是通过变换方式或添加次数来增强效果、巩固记忆、熟练技能;其次是通过必要的实践来积累理解所需要的操作数量、活动强度和经验体会。许多学生经过充分练习之后,题型积累有所增加,解题操作更加熟练,确实能解决一些形式变化的问题;还有些学生在获得答案之后也能说说自己是怎么想的,用了哪些知识、哪些方法,有的题目亦能进行一题多解。多数学生和广大教师都能达到这个水平。

"变式"是防止非本质属性泛化的一个有效措施。中国的数学教育有"变式教学"的优良传统,"变式练习"是这一传统在解题教学上的重要体现,它作为一种学科活动可以成为感悟解题思想、接近数学实质、形成学科素养的载体和通道。

记忆模仿、变式练习主要体现了“模式识别”的解题策略。它是学生获得本质领悟的基础或必要前提。但是，“没有理解的练习是‘傻练’（越练越傻），没有练习的理解是‘空想’（越想越空）”。因此，对学解题而言，更重要的是跨越模仿和练习而产生领悟。

1.3 数学解题的自发领悟阶段（水平 3）

这一阶段是在变式练习的基础上产生初步感悟，表现为个体经验的生成。如对解题思路的探求能够开始有意识的设计；解题不仅要获得答案，不仅能说出自己的思路，有时还能领悟其中的解题思想、解题方法和问题的深层结构，间或还能一解多题，并做出一些推广，还会有针对性地编拟新题。但是，这种领悟带有自发的性质和隐性学习的特征，常常是“只可意会，不可言传”。

这三个阶段，体现了“接受记忆知识—练习巩固知识—顿悟形成理解”这样一个逐步深化的认识过程。回想起来，自己当学生时学解题、初为人师时教学生解题，主要就是前两步，能够进入“自发领悟”阶段已经是数学学习的一种觉醒，即感悟到学解题需要“理解”（如同不仅会用数学归纳法的两个步骤，而且能去理解方法的无穷三段论本质）。但是，这种领悟长期停留在自发的和个性化的层面上，表现为一个漫长而又不可逾越的必由阶段（会存在高原现象），目前的很多学生就被挡在、或停留在这一步。我自己也总在这一阶段挣扎，但已经认识到：为了缩短被动、自发的过程，为了增加主动、自觉的元素，解题教与学还应该有第四阶段。

1.4 数学解题的自觉理解阶段（水平 4）

这一阶段表现为，能在领悟解题的基础上，进一步做到：

（1）数学问题的迅速识别，解题思路的主动设计，知识资源的理性配置，解题方法的灵活运用，解题策略的适宜调控，解题过程的自觉反思，努力通过解题去获得数学的理解，使认识进入深层结构。

（2）能从数学操作和正确答案中看到数学知识和数学方法的应用，能从数学知识和数学方法中看到数学思想和思维策略的指导，能从数学思想和思维策略中提炼数学核心素养（DNA），获得态度、情感的熏陶，形成正确价值观念、必备品格和关键能力。

（3）怎样通过解题获得理解呢？我的建议是：进行自觉的解题反思，通过分析“怎样解题”而领悟“怎样学会解题”。操作上通常要经历整体分解与信息交合两个步骤（参见拙著《中学数学解题的理论与实践》）。自觉的解题反思与检查、验算是有区别的，它不仅反思计算是否准确、推理是否合理、思维是否周密、解答是否还有更多更简单的途径等，而且还要提炼怎样解题和怎样学会解题的理论启示（为建设“数学解题学”做出贡献）。

当前的重点应是加强第四阶段的教学与研究，这是一个无限广阔的创造空间。

2 学解题水平划分的实例说明

下面，通过涉及组合数 C_n^2 的题组来做说明。

2.1 体现水平 1 的解题

初中、甚至小学的时候就见过这样一道题目：

例 1-1 如图 1，A，B，C，D，E 为直线上的 5 个点，问图中共有几条线段？

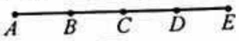

图 1

小：4+3+2+1=10

讲解：这对于小学生和初中生都是一个有智力挑战的问题，它的求解有两个关键的步骤：第一，对所给条件和所求结论进行几何结构的分析；第二，分类或分步完成计数。小学生做这样的题，主要是激发探究的兴趣，经历并体验将复杂问题化归为简单问题的数学思想。对于初中生，重点不应该还是计算，而应该是理解线段的几何结构，即“两点决定一条线段”，于是找多少条线段就是找多少对不同的“两点”。

解法 1：先找左端点、再找右端点，分 4 类完成。

第一类：A 为左端点时，右端点有 B，C，D，E，共 4 条线段；

第二类：B 为左端点时，右端点有 C，D，E，共 3 条线段；

第三类：C 为左端点时，右端点有 D，E，共 2 条线段；

第四类：D 为左端点时，右端点有 E，共 1 条线段。

E 不能是左端点，故共有线段 $4+3+2+1=10$ 条。

伴随这些步骤，可以逐一画出 10 条线段。其解题的收获不只是计算出数字 10，而是通过具体情境深化对线段几何结构的认识，正是线段的结构决定了解题的方向，正是取线段端点的方式决定了为什么分类和怎样分类。

作为“从简单入手”化归策略的运用，还可以如下分类完成：

解法 2：按照线段的组成，分 4 类完成。

第一类：由相邻的 2 个点组成的基本线段，有 AB，BC，CD，DE，共 4 条；

第二类：由 2 条相邻基本线段组成的线段，有 AC，BD，CE，共 3 条；

第三类：由 3 条相邻基本线段组成的线段，有

AD, BE,共 2 条;

第四类:由 4 条相邻基本线段组成的线段,就是 AE,只有 1 条。

故共有线段 $4+3+2+1=10$ 条。

解法 1、解法 2 都对"点在线上"有直接的依赖。其实,理解"两点决定一条线段"的实质就可以明白,线段是不是水平放置并无关系,求解可以摆脱对"左右位置"的依赖(参见图 2):

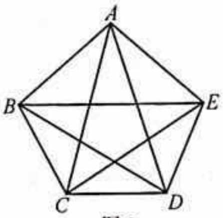

图 2

解法 3:连续找 2 个点,分 4 步完成。

第一步(找乘数):找第一个端点,5 个点都可以作端点,有 5 种方法;

第二步(找被乘数):找第二个端点,剩下的 4 点都可以作端点,有 4 种方法;

第三步(做乘法):第一步的每一个端点都可以连 4 条线,计有 $4\times5=20$ 条;

第四步(去掉重复):上述计算中,线段 AB 与线段 BA 是同一条线段,去掉重复的线段,共有线段 $\frac{5\times4}{2}=10$ 条。

解法 3 可以简写为(如图 2):每一个点都有 4 条引线,5 个点共有引线 $4\times5=20$ 条,但 AB 连线与 BA 连线是同一条线段,故去掉重复的线段,共有线段 $\frac{5\times4}{2}=10$ 条。

容易明白,解法 1、解法 2 用加法,思维比较显浅,但依赖于点的位置顺序,若将点放到平面或空间,其局限性立即暴露出来。解法 3 用乘法,思维稍为复杂,但有一般性。到高中阶段,点数可以推广到 n 个,位置可以推广到空间。

例 1-2 (1)直线上有 $n(n\geqslant2)$ 个点,两两连线,一共可连几条线段?

(2)平面上(或空间中)有 $n(n\geqslant2)$ 个点,两两连线,一共可连几条线段?

讲解:第(1)问依然有 3 种解法,可以帮助学生理解"加法原理"和"乘法原理":"事独达则加""事相因则乘"(理解原理应是高中与初中的一个区别)。第(2)问则适宜用"乘法原理",并得出"从 n 个相异元素取出 2 个"的组合数 C_n^2,及其计算公式

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1。$$

在这里,"空间中 $n(n\geqslant2)$ 个点两两连线的线段条数"是 C_n^2 的一个现实原型,而 C_n^2 是"空间中 $n(n\geqslant2)$ 个点两两连线的线段条数"的抽象模式。在这个过程中,学生不仅学到了计算公式 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,而且掌握了"加法原理"和"乘法原理",更重要的是,在这些知识和方法的背后有数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算等多个核心数学素养的感悟与生成(是潜在功能,还需要解题教学去发挥作用)。

生活中有"n 个人两两握手""n 个人两两打电话""n 支篮球队进行循环赛"等大量的 C_n^2 问题,还有"空间中 $n(n\geqslant2)$ 个点,无'三点共线'时的两两连直线"等数学情境,积累这些基本事实,并以此为基础去解决更多的问题,学解题就达到了"水平 1",并可以向"水平 2"进发。

2.2 体现水平 2 的解题

进入"水平 2"应该能够胜任诸如下述的"变式练习"。

例 2-1 直线上有 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant2)$,直线外有一个点 P,以这 $n+1$ 个点为顶点,可以组成几个三角形?这些三角形共有几条边(重合只算一条)?

讲解:三角形由不共线的三点组成(也可以由线段及线段外一点组成),因而直线上的 n 个点不能独立组成三角形,所有的三角形都要取到直线外的点 $P(\triangle PA_iA_j)$,于是,问题归结为从直线上的 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 取出两个点的方法数,即 C_n^2 模型。

计算三角形的边数时不能直接乘以 3,因为每一条 PA_i 都重复计算了 $n-1$ 次,需要排除重复,得 $3C_n^2-n(n-2)$;转换视角,每两点的连线都是某个(些)三角形的边,反之,三角形的每条边都一定是某两点的连线,所以这 $n+1$ 个点可以连多少条线段就有多少条三角形的边,得 C_{n+1}^2 条。由此,还得出恒等式 $C_{n+1}^2=3C_n^2-n(n-2)$。显然,还可以是 C_n^2+n,即有恒等式 $C_{n+1}^2=C_n^2+n=3C_n^2-n(n-2)$。

例 2-2 空间中 $n(n\geqslant4)$ 个点,其中有 $m(3\leqslant m<n)$ 个点在同一直线上,此外再无三点共线,问两两连线可以连出多少条直线?以这 n 个点为顶点,可以组成几个三角形?

讲解:此处由线段到直线的变化,就是在 C_n^2 基本模式的基础上,添加了有"m 点共线"的变化,此时 C_m^2 条重合为一条直线,得 $C_n^2-C_m^2+1$。也可以直接用"加法原理"和"乘法原理"分 3 类计算。

第一类:无三点共线的 $n-m$ 个点可以连直线 C_{n-m}^2 条;

第二类:"无三点共线的 $n-m$ 个点"与"共线 m 点"之间可以连直线 $C_{n-m}^1C_m^1$ 条;

第三类:共线的 m 点只能连 1 条直线,得

$$C_{n-m}^2+C_{n-m}^1C_m^1+1=\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)+1。$$

(下转第 21 页)

（上接第 4 页）

两种思路结果是相等的，即

$C_n^2-C_m^2+1=C_{n-m}^2+C_{n-m}^1C_m^1+1$。

找三角形也有两个思路，一个思路是从 n 个点中取 3 个点，有 C_n^3 种取法，但从“共线 m 点”中取 3 个点，共有 C_m^3 种取法，则不构成三角形，得 $C_n^3-C_m^3$ 个三角形。另一个思路是直接用“加法原理”和“乘法原理”，分 3 类计算：

第一类：无三点共线的 $n-m$ 个点可以连 C_{n-m}^3 个三角形；

第二类：“无三点共线的 $n-m$ 个点”与“共线 m 点”之间可以连 $C_{n-m}^2C_m^1+C_{n-m}^1C_m^2$ 个三角形；

第三类：共线的 m 点不能组成三角形，得 $C_{n-m}^3+C_{n-m}^2C_m^1+C_{n-m}^1C_m^2$。

由此，可得出恒等式

$C_n^3-C_m^3=C_{n-m}^3+C_m^1C_{n-m}^2+C_m^2C_{n-m}^1$。

（未完待续）