

# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

## 数学周三练习 (5) 理科

2018. 10. 3

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, a^2 + 3\}$ , 若  $A \cap B = \{1\}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
2. 若复数  $z$  满足  $(2-i)z = 1+i$ , 则复数  $z$  在复平面上对应的点在第\_\_\_\_\_象限.
3. 对于命题  $p: \exists x \in R$ , 使得  $x^2 + x + 1 < 0$ . 则  $\neg p$  为: \_\_\_\_\_.
4. 函数  $f(x) = \frac{1}{\ln(4x-3)}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
5. 设  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 向量  $\vec{a} = (\cos \theta, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, \sin \theta)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $\tan \theta =$ \_\_\_\_\_.
6.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $C = 60^\circ$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  $c = 3$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_.
7. 设直线  $y = -3x + b$  是曲线  $y = x^3 - 3x^2$  的一条切线, 则实数  $b$  的值是\_\_\_\_\_.
8. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AP \perp BD$ , 垂足为  $P$ , 且  $AP = 3$ , 则  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.
9. 已知函数  $f(x)$  在定义域  $[2-a, 3]$  上是偶函数, 在  $[0, 3]$  上单调递减, 并且  $f(-m^2 - \frac{a}{5}) > f(-m^2 + 2m - 2)$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
10. 将函数  $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象, 则函数  $g(x)$  具有性质\_\_\_\_\_. (填入所有正确性质的序号)  
①最大值为  $\sqrt{3}$ , 图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{3}$  对称; ②图象关于  $y$  轴对称; ③最小正周期为  $\pi$ ;  
④图象关于点  $(\frac{\pi}{4}, 0)$  对称; ⑤在  $(0, \frac{\pi}{3})$  上单调递减.
11. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2ax - 2y + 2 = 0$  ( $a$  为常数) 与直线  $y = x$  相交于  $A, B$  两点, 若  $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
12. 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 且  $|\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + 2S$ , 则  $\angle B$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 已知点  $P$  是圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  上的动点, 点  $A(4, 0)$ , 若直线  $y = kx + 1$  上总存在点  $Q$ , 使点  $Q$  恰是线段  $AP$  的中点, 则实数  $k$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x - 1, & x \in (0, 1] \\ kx + 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$  有两个不相等的零点  $x_1, x_2$ , 则  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

**二. 解答题: 本大题共 6 小题, 计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤, 请把答案写在答题纸的指定区域内.**

15. 已知  $\vec{m} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1)$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ .

(1) 若  $\vec{m} \perp \vec{n}$ , 求角  $\alpha$  的值;

(2) 求  $|\vec{m} + \vec{n}|$  的最小值.

16. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin(A + C) = 8 \sin^2 \frac{B}{2}$ .

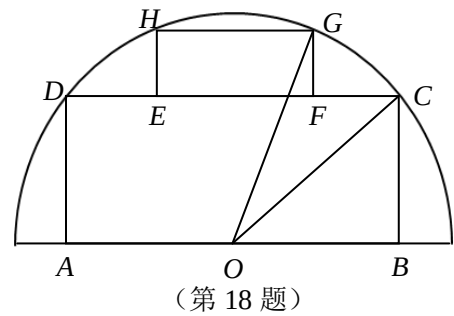
(1) 求  $\cos B$ ; (2) 若  $a + c = 6$ ,  $\triangle ABC$  的面积为 2, 求  $b$ .

17. 设  $p$ : 实数  $x$  满足  $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$  (其中  $a \neq 0$ ),  $q$ : 实数  $x$  满足  $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0 \end{cases}$

- (1)若  $a=1$ ，且  $p \wedge q$  为真，求实数  $x$  的取值范围；
- (2)若  $p$  是  $q$  的必要不充分条件，求实数  $a$  的取值范围.

18. 如图，有一块半圆形空地，开发商计划建一个矩形游泳池  $ABCD$  及其矩形附属设施  $EFGH$ ，并将剩余空地进行绿化，园林局要求绿化面积应最大化. 其中半圆的圆心为  $O$ ，半径为  $R$ ，矩形的一边  $AB$  在直径上，点  $C$ 、 $D$ 、 $G$ 、 $H$  在圆周上， $E$ 、 $F$  在边  $CD$  上，且  $\angle BOG = \frac{\pi}{3}$ ，设  $\angle BOC = \theta$ .

- (1) 记游泳池及其附属设施的占地面积为  $f(\theta)$ ，求  $f(\theta)$  的表达式；
- (2) 怎样设计  $f(\theta)$  最大？



19. 已知圆  $O: x^2+y^2=2$ ，直线  $l: y=kx-2$ .

- (1) 若直线  $l$  与圆  $O$  交于不同的两点  $A, B$ , 当  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  时, 求  $k$  的值;
- (2) 若  $k = \frac{1}{2}$ ,  $P$  是直线  $l$  上的动点, 过  $P$  作圆  $O$  的两条切线  $PC, PD$ , 切点为  $C, D$ , 探究: 直线  $CD$  是否过定点? 若过定点则求出该定点, 若不存在则说明理由;
- (3) 若  $EF, GH$  为圆  $O: x^2 + y^2 = 2$  的两条相互垂直的弦, 垂足为  $M(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 求四边形  $EGFH$  的面积的最大值.

20. 已知函数  $f(x) = (ax - 1)e^x$  ( $a \neq 0$ ,  $e$  是自然对数的底数).

- (1) 若函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上是单调减函数, 求实数  $a$  的取值范围;
- (2) 求函数  $f(x)$  的极值;
- (3) 设函数  $f(x)$  图象上任意一点处的切线为  $l$ , 求  $l$  在  $x$  轴上的截距的取值范围.

1. 1      2. —      3.  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 均有  $x^2 + x + 1 \geq 0$       4.  $\left\{x \mid x > \frac{3}{4} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$       5.  $\frac{1}{2}$       6.  $75^\circ$

7. 1      8. 18      9.  $1 - \sqrt{2} \leq m < \frac{1}{2}$       10. ②③④      11. -5      12.  $\frac{\pi}{4}$       13.  $[-\frac{4}{3}, 0]$

14.  $\frac{9}{4}$

15. 解:

(1) 因为  $\vec{m} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1)$ , 且  $\vec{m} \perp \vec{n}$

所以  $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = 0, \dots (2 \text{ 分})$

即  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ , 又  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $\dots (4 \text{ 分})$

所以  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \dots (6 \text{ 分})$

(2) 因为  $\vec{m} + \vec{n} = (\cos \alpha + \sqrt{3}, \sin \alpha - 1), \dots (8 \text{ 分})$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\vec{m} + \vec{n}| &= \sqrt{(\cos \alpha + \sqrt{3})^2 + (\sin \alpha - 1)^2} \\ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{3} \cos \alpha - 2 \sin \alpha} \\ &= \sqrt{5 + 4 \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)} \dots (12 \text{ 分}) \end{aligned}$$

因为  $\alpha \in (0, \pi)$ , 所以  $\alpha + \frac{\pi}{6} \in \left( \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right)$ ,

故当  $\alpha + \frac{\pi}{6} = \pi$  时,  $|\vec{m} + \vec{n}|$  取到最小值 1  $\dots (14 \text{ 分})$

16. 解: (1)  $\because \sin(A+C) = 8 \sin^2 \frac{B}{2}$ ,  $\therefore \sin B = 4(1 - \cos B)$ ,

$\therefore \sin^2 B + \cos^2 B = 1$ ,  $\therefore 16(1 - \cos B)^2 + \cos^2 B = 1$ ,  $\therefore 16(1 - \cos B)^2 + \cos^2 B - 1 = 0$ ,

$\therefore 16(\cos B - 1)^2 + (\cos B - 1)(\cos B + 1) = 0$ ,  $\therefore (17 \cos B - 15)(\cos B - 1) = 0$ ,  $\therefore \cos B = \frac{15}{17}$ ;

(2) 由 (1) 可知  $\sin B = \frac{8}{17}$ ,  $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = 2$ ,  $\therefore ac = \frac{17}{2}$ ,

$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2 \times \frac{17}{2} \times \frac{15}{17} = a^2 + c^2 - 15 = (a+c)^2 - 2ac - 15 = 36 - 17 - 15 = 4$ ,

$\therefore b = 2$ .

17. 解: (1) 当  $a = 1$  时, 解得  $1 < x < 3$ , 即  $p$  为真时实数  $x$  的取值范围是  $1 < x < 3$ .  $\dots 2 \text{ 分}$

由  $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0 \end{cases}$ , 得  $2 < x \leq 3$ , 即  $q$  为真时实数  $x$  的取值范围是  $2 < x \leq 3$ .  $\dots 4 \text{ 分}$

若  $p \wedge q$  为真, 则  $p$  真且  $q$  真,  $\dots 5 \text{ 分}$

所以实数  $x$  的取值范围是  $(2, 3)$ .  $\dots 7 \text{ 分}$

(2) $p$  是  $q$  的必要不充分条件, 即  $q \Rightarrow p$ , 且  $p \not\Rightarrow q$ , .....8 分

设  $A = \{x | p(x)\}$ ,  $B = \{x | q(x)\}$ , 则  $A \subset B$ , 又  $B = (2, 3]$ ,

由  $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$  得  $(x - 3a)(x - a) < 0$ , .....9 分

当  $a > 0$  时,  $A = (a, 3a)$ , 有  $\begin{cases} a \leq 2 \\ 3 < 3a \end{cases}$ , 解得  $1 < a \leq 2$ ; .....11 分

当  $a < 0$  时,  $A = (3a, a)$ , 显然  $A \cap B = \emptyset$ , 不合题意. ....13 分

所以实数  $a$  的取值范围是  $(1, 2]$ . ....14 分

18. 解: (1) 由题意,  $AB = 2R \cos \theta$ ,  $BC = R \sin \theta$ , 且  $\triangle HOG$  为等边三角形,

所以,  $HG = R$ ,  $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}R - R \sin \theta$ , .....3 分

$$f(\theta) = S_{ABCD} + S_{EFGH}$$

$$= 2R \cos \theta \cdot R \sin \theta + R \left( \frac{\sqrt{3}}{2}R - R \sin \theta \right)$$

$$= R^2 \left( 2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \theta \in \left( 0, \frac{\pi}{3} \right). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) 要符合园林局的要求, 只要  $f(\theta)$  最小,

$$\text{由 (1) 知, } f'(\theta) = R^2 (2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - \cos \theta) = R^2 (4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2)$$

$$\text{令 } f'(\theta) = 0, \text{ 即 } 4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos \theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \text{ 或 } \cos \theta = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ (舍去)}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \cos \theta_0 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \quad \theta_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{3} \right),$$

当  $\theta \in (0, \theta_0)$  时,  $f'(\theta) < 0$ ,  $f(\theta)$  是单调增函数,

当  $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{3})$  时,  $f'(\theta) > 0$ ,  $f(\theta)$  是单调减函数,

所以当  $\theta = \theta_0$  时,  $f(\theta)$  取得最大值.

答: 当  $\theta$  满足  $\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$  时,  $f(\theta)$  取得最大值.. ....16 分

19. 解: (1)  $\because \angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore$  点  $O$  到  $l$  的距离  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ ,  $\therefore \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow k \pm \sqrt{3}$ .

(2) 由题意可知:  $O, P, C, D$  四点共圆且在以  $OP$  为直径的圆上, 设  $P(t, \frac{1}{2}t - 2)$ .

$$\text{其方程为: } x(x - t) + y(y - \frac{1}{2}t + 2) = 0, \text{ 即 } x^2 - tx + y^2 - (\frac{1}{2}t - 2)y = 0,$$

又  $C, D$  在圆  $O: x^2 + y^2 = 2$  上,

$$\therefore l_{CD}: tx + (\frac{1}{2}t - 2)y - 2 = 0, \text{ 即 } (x + \frac{y}{2})t - 2y - 2 = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $CD$  过定点  $(-\frac{1}{2}, -1)$ .

(3) 设圆心  $O$  到直线  $EF, GH$  的距离分别为  $d_1, d_2$ .

$$\text{则 } d_1^2 + d_2^2 = |OM|^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore |EF| = 2\sqrt{r^2 - d_1^2} = 2\sqrt{12 - d_1^2} |GH| = 2\sqrt{r^2 - d_2^2} = 2\sqrt{2 - d_2^2}$$

$$S = \frac{1}{2}|EF||GH| = 2\sqrt{(2 - d_1^2)(2 - d_2^2)} = \sqrt{-4d_2^4 + 6d_2^2 + 4} = \sqrt{-4(d_2^2 - \frac{3}{4})^2 + \frac{25}{4}} \leq \frac{5}{2},$$

当且仅当  $d_2^2 = \frac{3}{4}$ , 即  $d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时, 取 “=”

$\therefore$  四边形  $EGFH$  的面积的最大值为  $\frac{5}{2}$ .

20.解: (1) 函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x) = (ax - 1 + a)e^x$ ,

则  $f'(x) \leq 0$  在区间  $[1, 2]$  上恒成立, 且等号不恒成立,

又  $e^x > 0$ , 所以  $ax - 1 + a \leq 0$  在区间  $[1, 2]$  上恒成立, .....2 分

记  $g(x) = ax - 1 + a$ , 只需  $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g(2) \leq 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} 2a - 1 \leq 0 \\ 3a - 1 \leq 0 \end{cases}$ , 解得  $a \leq \frac{1}{3}$ . .....4 分

(2) 由  $f'(x) = (ax - 1 + a)e^x = 0$ , 得  $x = \frac{1-a}{a}$ ,

① 当  $a < 0$  时, 有  $x \in (-\infty, \frac{1-a}{a})$ ,  $f'(x) > 0$ ;  $x \in (\frac{1-a}{a}, +\infty)$ ,  $f'(x) < 0$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $x \in (-\infty, \frac{1-a}{a})$  单调递增,  $x \in (\frac{1-a}{a}, +\infty)$  单调递减,

所以函数  $f(x)$  在  $x = \frac{1-a}{a}$  取得极大值  $-a \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$ , 没有极小值.

② 当  $a > 0$  时, 有  $x \in (-\infty, \frac{1-a}{a})$ ,  $f'(x) < 0$ ;  $x \in (\frac{1-a}{a}, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $x \in (-\infty, \frac{1-a}{a})$  单调递减,  $x \in (\frac{1-a}{a}, +\infty)$  单调递增,

所以函数  $f(x)$  在  $x = \frac{1-a}{a}$  取得极小值  $-a \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$ , 没有极大值.

综上所述: 当  $a < 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x = \frac{1-a}{a}$  取得极大值  $-a \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$ , 没有极小值;

当  $a > 0$  时, 函数  $f(x)$  在  $x = \frac{1-a}{a}$  取得极小值  $-a \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$ , 没有极大值.

.....10 分

(3) 设切点为  $T(t, (at-1)e^t)$ ,

则曲线在点  $T$  处的切线  $l$  方程为  $y - (at-1)e^t = (at-1+a)(x-t)e^t$ ,

当  $t = \frac{1-a}{a}$  时, 切线  $l$  的方程为  $y = (at-1)e^t = -a \cdot e^{\frac{1-a}{a}}$ , 其在  $x$  轴上的截距不存在.

当  $t \neq \frac{1-a}{a}$  时, 令  $y = 0$ , 得切线  $l$  在  $x$  轴上的截距为

$$x = t - \frac{at-1}{at-1+a} = t - \frac{(at-1+a)-a}{at-1+a} = t - 1 + \frac{a}{at-1+a} = t - 1 + \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1}$$

$$= t - \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1} - 2 + \frac{1}{a}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

当  $t - \frac{1}{a} + 1 > 0$  时,

$$x = t - \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1} - 2 + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{\left(t - \frac{1}{a} + 1\right) \cdot \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1}} - 2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a},$$

当且仅当  $t - \frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1}$ , 即  $t = \frac{1}{a}$  或  $t = \frac{1}{a} - 2$  时取等号;  $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

当  $t - \frac{1}{a} + 1 < 0$  时,

$$x = t - \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1} - 2 + \frac{1}{a} \leq -2 \sqrt{\left[-\left(t - \frac{1}{a} + 1\right)\right] \cdot \frac{1}{-(t - \frac{1}{a} + 1)}} - 2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - 4,$$

当且仅当  $t - \frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{t - \frac{1}{a} + 1}$ , 即  $t = \frac{1}{a}$  或  $t = \frac{1}{a} - 2$  时取等号.

所以切线  $l$  在  $x$  轴上的截距范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{a} - 4\right] \cup \left[\frac{1}{a}, +\infty\right)$ .  $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$