江苏省仪征中学2018-2019学年第一学期高三数学

周三练习（9）　　2018.11.7

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一. 填空题：本大题共14小题，每小题5分，计70分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．设$U=R, A=(1,3), B=(2,4)$，则$A\cup B=$___________.

2．函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3)}$的定义域为____________.

3．若复数$z=(1+mi)(2-i)$（i是虚数单位）是纯虚数，则实数m的值为_________.

4．已知$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(2x,3)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$x$的值是_______.

5．已知$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$且$\alpha\in(\frac{3\pi}{4},2\pi)$，则 $\cos\alpha=$_____.

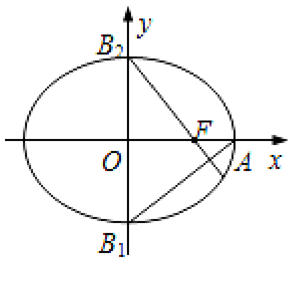
6．已知点$P(x,y)$的坐标满足条件$\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge x \\ x-2y+3\ge 0 \end{cases}$，则$(x-2)^2+(y-1)^2$的最小值为_______.

7．命题"∃ x∈R，使$x^2-ax+1<0$"是真命题，则a的取值范围是____.

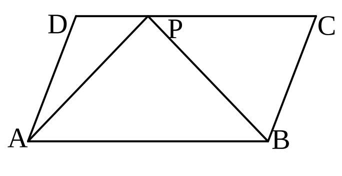
8．已知直线$ax-by-3=0$与$f(x)=xe^x$在点P（1，e）处的切线相互垂直，则$\frac{a}{b}=$______.

9．已知锐角θ满足$\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{4}{5}$则$\cos(\theta+\frac{5\pi}{6})$的值为__________.

10．如图，在平面直角坐标系xOy中，已知A，B_1，B_2分别为椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右、下、上顶点，F是椭圆C的右焦点．若$B_2F\perp AB_1$，则椭圆C的离心率是____.



11．如图，在平行四边形$ABCD$中，已知$|\overrightarrow{AB}|=6,|\overrightarrow{AD}|=4,\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD},\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角的余弦值是___________.



12．在平面直角坐标系xoy中，圆C:$(x+2)^2+(y-m)^2=3$，若圆C上存在以G为中点的弦AB，且AB=2GO，则实数m的取值范围为__________.

13．已知偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x$，且在 $x\in[-2,0$ 时，$f(x)=-x^2+1$，若存在 $x_1,x_2,x_3,......x_n$ 满足 $0\le x_1<x_2<......<x_n$，且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(x_n)|=2018$，则 x_n 最小值为_________.

14．在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 a 不是最大边，已知 $a^2-b^2=2bc\sin A$ 则 $2\tan A-9\tan B$ 的最小值为__________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2a\sin\varpi x\cos\varpi x+2\sqrt{3}\cos^2\varpi x-\sqrt{3}(a>0,\varpi>0)$ 的最大值为 2，且最小正周期为 π．

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式及期对称轴方程；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间．

16．（本小题满分 14 分）

在 ΔABC 中，$c=5$，$b=2\sqrt{6}$，$a=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\cos A$．

（1）求 a 的值；

（2）求证：$\angle B=2\angle A$．

17. （本小题满分 14 分）

已知集合 $A=\{x|x^2-8x+7<0\}$，$B=\{x|x^2-2x-a^2-2a<0\}$

（1）当 $a=4$ 时，求 $A\cap B$；

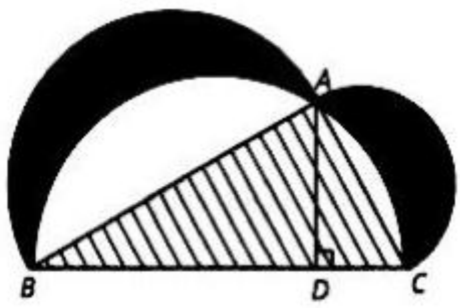
（2）若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 16 分）

下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC、直角边 AB、直角边 AC，△ABC 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III．若 BC＝10，设∠ABC＝$\dfrac{\theta}{2}$.

（1）试写出区域 III 面积 S_{III} 关于 θ 的函数解析式，并求区域 III 面积 S_{III} 的最小值；

（2）过点 A 作 AD⊥BC 于 D，当△ABD 面积最大时，求区域 II 的面积 S_{II}.

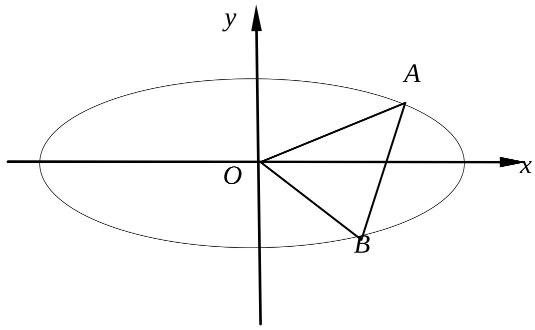


19. （本小题满分 16 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点．当直线 l 与 x 轴垂直时，AB 长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若椭圆上存在一点 P，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求直线 l 的斜率．



（第 19 题图）

20. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-bx+2$，$a\in R$，$b\in R$．

（1）若 a＝0，b＝1，求证：$f(x)$ 在区间(3，4)上有唯一零点；

（2）若 $a\in$ Z，b＝0，不等式 $f(x)>a+1$ 对任意的 $x\in$(1，$+\infty$)恒成立，求整数 a 的最大值．

周三练习（9）参考答案

1. $(1,4)$ 2. $(3,4]$ 3. -2 4. 3 5. $\pm\frac{4\sqrt{31}}{31}$

6. $\frac{1}{2}$ 7. （－∞，－2）∪（2，+∞） 8. $-\frac{1}{2e}$ 9. $-\frac{24}{25}$

10. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 11. $\frac{29}{48}$ 12. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 13. $1008+\sqrt{2}$ 14. $3\sqrt{2}-\frac{11}{2}$

15. 解：（1） $f\left(x\right)=a\sin 2\omega x+\sqrt{3}\cos 2\omega x$， ……………………………………2 分

由题意 $f\left(x\right)$ 的周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得 $\omega=1$， ……………………………………4 分

$\because$ $f\left(x\right)$ 最大值为 2，故 $\sqrt{a^2+3}=2$，

又 $a>0$，$\therefore$ $a=1$，

$\therefore$ $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ……………………………………7 分

令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $f\left(x\right)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in\mathrm{Z}$）. ………………10 分

（2）由 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ 得，……………………………………12 分

$k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12},k\in Z$，

∴函数 f（x）的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right],k\in Z$． ……………………14 分

16. 解：（1）因为 $a=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cos A$，所以 $a=\frac{3\sqrt{6}}{2}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$． ……………3 分

因为 $c=5$，$b=2\sqrt{6}$，

所以 $3a^2+40a-49\times 3=0$．

解得：$a=3$，或 $a=-\frac{49}{3}$（舍）． ………………6 分

（2）（解法一）由（1）可得：$\cos A=\frac{2}{3\sqrt{6}}\times 3=\frac{\sqrt{6}}{3}$． ……………8 分

所以$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1}{3}$.　　　　……………… 10 分

因为$a=3$，$c=5$，$b=2\sqrt{6}$，所以$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1}{3}$.

所以$\cos 2A = \cos B$.　　　　……………… 12 分

因为$c>b>a$，　所以$A \in (0,\frac{\pi}{2})$.

因为$B \in (0,\pi)$，所以$\angle B = 2\angle A$.　　　　……………… 14 分

17. 解：（1）集合 A=$\{x|x^2-8x+7<0\}=\{x|1<x<7\}$，

当 a=4 时，B=$\{x|x^2-2x-24<0\}=\{x|-4<x<6\}$，

∴A∩B=（1，6）

（2）B=$\{x|x^2-2x-a^2-2a<0\}=\{x|(x+a)(x-a-2)<0\}$，

∵A⊆B，

①当 a=－1 时，B=∅，∴A⊆B 不成立；

②当 a+2>－a，即 a>－1 时，B=（－a，a+2），

∵A⊆B，∴$\begin{cases}-a\leqslant 1\\ a+2\geqslant 7\end{cases}$，解得 a≥5；

③当 a+2<－a，即 a<－1 时，B=（a+2，－a），

∵A⊆B，∴$\begin{cases}a+2\leqslant 1\\ -a\geqslant 7\end{cases}$，解得 a≤－7；

综上，当 A⊆B，实数 a 的取值范围是（－∞，－7]∪[5，+∞）.

18.解：（1）因为$BC=10$，$\angle ABC=\frac{\theta}{2}$，

所以$AB=10\cos\frac{\theta}{2}$，$AC=10\sin\frac{\theta}{2}$，

区域Ⅰ面积$S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\times 10\cos\frac{\theta}{2}=25\sin\theta$，　　　…………2分

区域III面积$S_{\text{III}}=\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2-S_1=\frac{25\pi}{2}-25\sin\theta$，

所以，区域III面积$S_{\text{III}}=\frac{25\pi}{2}-25\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$　　　…………4分

因为$\theta\in(0,\pi)$，所以当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，　$S_{3\min}=\frac{25\pi}{2}-25$；

答：区域III面积的最小值为$\frac{25\pi}{2}-25$；　　　…………6分

（2）因为$BC=10$，$\angle ABC=\frac{\theta}{2}$，所以$AB=10\cos\frac{\theta}{2}$，

$BD=AB\cos\frac{\theta}{2}=10\cos^2\frac{\theta}{2}=5(1+\cos\theta)$

$AD=AB\sin\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=5\sin\theta$

所以 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AD=\frac{1}{2}\times 5\sin\theta\cdot 5(1+\cos\theta)=\frac{25}{2}\sin\theta(1+\cos\theta)$ …………10分

设 $f(\theta)=\sin\theta(1+\cos\theta)$， $\theta\in(0，\pi)$

则 $f'(\theta)=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$， $\theta=\frac{\pi}{3}$

当 $\theta\in(0，\frac{\pi}{3})$ 时， $\cos\theta>\frac{1}{2}$， $f'(\theta)>0$， $f(\theta)$ 为增函数

当 $\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi)$ 时， $\cos\theta<\frac{1}{2}$， $f'(\theta)<0$， $f(\theta)$ 为减函数

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时， $f(\theta)$ 最大， ΔABD 面积最大， …………13分

此时，区域Ⅱ面积 $S_2=\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2-S_3$

$=\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{AB}{2})^2-(\frac{1}{2}\pi(\frac{BC}{2})^2-S_1)=S_1$

$S_1=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 10\sin\frac{\theta}{2}\times 10\cos\frac{\theta}{2}=25\sin\theta=\frac{25\sqrt{3}}{2}$，

答：当 ΔABD 面积最大时，区域Ⅱ的面积为 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$． …………16分

19．解：(1)由题意可知 $c=1$，

当 l 与 x 轴垂直时， $AB=\frac{2b^2}{a}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ……3 分

因为 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $a=\sqrt{3}$， $b^2=2$ 故椭圆的标准方程是： $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$． ……6 分

(2) 设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程： $y=k(x-1)$，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， $P(x_3,y_3)$．

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 可得 $(3k^2+2)x^2-6k^2x+3k^2-6=0.$ ……8 分

则 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+2}$， $x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2}$．（*）因 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，则 $\begin{cases}x_3=x_1+x_2\\ y_3=y_1+y_2\end{cases}$，

代入椭圆方程有 $\frac{(x_1+x_2)^2}{3}+\frac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$，又 $\frac{{x_1}^2}{3}+\frac{{y_1}^2}{2}=1$， $\frac{{x_2}^2}{3}+\frac{{y_2}^2}{2}=1$，化简得

$2x_1x_2+3y_1y_2+3=0$，即 $(3k^2+2)x_1x_2-3k^2(x_1+x_2)+3k^2+3=0$， ……12 分

将（*）代入得 $3k^2-6-\frac{3k^2\times 6k^2}{3k^2+2}+3k^2+3=0$， $k^2=2$，即 $k=\pm\sqrt{2}$．

故直线 l 的斜率为 $\pm\sqrt{2}$． ……16 分

20．解：（1）因为 $a=0$， $b=1$，所以 $f(x)=\ln x-x+2$，

$f(3)=\ln 3-1>0$， $f(4)=\ln 4-2=2(\ln 2-1)<0$，

$f(x)$ 在区间 $[3，4]$ 上是一条不间断的曲线，

$f(x)$ 在区间 $(3，4)$ 上存在零点， …………4分

又 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为单调减函数，

所以 $f(x)$ 在区间 $(3,4)$ 上有唯一零点； …………6分

（2）因为 $b=0$，所以 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}+2$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$， …………8分

①当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为单调增函数

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>f(1)=a+2>a+1$ 恒成立，

所以 $a\leqslant 1$ 成立； …………10分

②当 $a>1$ 时，$x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)_{\min}=f(a)=\ln a+3>a+1$， …………12分

所以 $\ln a-a+2>0$，令 $g(x)=\ln x-x+2$，

由（1）知 $g(x)=\ln x-x+2$ 在在 $(1,+\infty)$ 上为单调减函数且 $(3,4)$ 上有唯一零点，

设这个零点为 t，$t\in(3,4)$，

由 $\ln a-a+2>0$ 的 $1<a<t$，又因为 $a\in\mathbf{Z}$，

所以整数 a 的最大值为 3． …………16分