江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学

中档大题训练（4）　　9.27

班级 ________________　　　　　　　姓名________________

1．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$．

（1）求角 A 的大小；

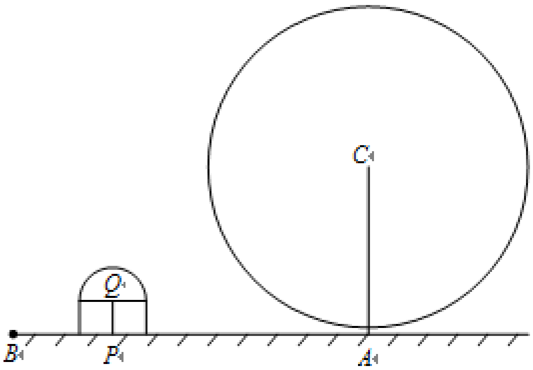
（2）若 $\cos(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，求 cosC 的值．

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $x-3y-10=0$ 与圆 O： $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切．

（1）直线 l 过点(2，1)且截圆 O 所得的弦长为 $2\sqrt{6}$ ，求直线 l 的方程；

（2）已知直线 $y=3$ 与圆 O 交于 A，B 两点，P 是圆上异于 A，B 的任意一点，且直线 AP，BP 与 y 轴相交于 M，N 点．判断点 M、N 的纵坐标之积是否为定值?若是，求出该定值；若不是，说明理由．

3．如图，某摩天轮底座中心 A 与附近的景观内某点 B 之间的距离 AB 为 160m．摩天轮与景观之间有一建筑物，此建筑物由一个底面半径为 15m 的圆柱体与一个半径为 15m 的半球体组成．圆柱的底面中心 P 在线段 AB 上，且 PB 为 45m．半球体球心 Q 到地面的距离 PQ 为 15m．把摩天轮看作一个半径为 72m 的圆 C，且圆 C 在平面 BPQ 内，点 C 到地面的距离 CA 为 75m．该摩天轮匀速旋转一周需要 30min，若某游客乘坐该摩天轮(把游客看作圆 C 上一点)旋转一周，求该游客能看到点 B 的时长．(只考虑此建筑物对游客视线的遮挡)



4. 已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}+\left(2-a\right)x-a\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）如果曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 1，求实数 a 的值；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的极小值不超过 $\frac{a}{2}$，求实数 a 的最小值；

江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学
中档大题训练（4）答案　9.27

1．

解：（1）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，且 $\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$，　　……1分

得 $\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$，　　……2分

则有 $\sqrt{3}\sin A=2-\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，$2\sin(A+\frac{\pi}{6})=2$，

则 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，　　……4分

因为 $A\in(0,\ \pi)$，则 $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，则 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$.　　……6分

（2）在△ABC中，因为 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，则 $\sin(B+\frac{\pi}{6})>0$.

又因为 $\cos(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，则 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\cos^2(B+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.　　……8分

又在△ABC中，$A+B+C=\pi$，　　……9分

所以 $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos(A+B)=-\cos(B+\frac{\pi}{3})$　　……10分

$=-\cos[(B+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=-\cos(B+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(B+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$.　　……14分

2．解：∵直线 $x-3y-10=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切

∴圆心 O 到直线 $x-3y-10=0$ 的距离为 $r=\frac{|10|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}$．

（1）记圆心到直线 l 的距离为 d，所以 $d=\sqrt{10-6}=2$．

当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=2$，满足题意；

当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+(1-2k)=0$

所以$d=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得$k=-\frac{3}{4}$，此时直线$l$的方程为$3x+4y-10=0$

综上，直线l的方程为$x=2$或$3x+4y-10=0$．

（2）设$P(x_0,y_0)$．∵直线$y=3$与圆O交于A、B两点，不妨取$A(1,3),B(-1,3)$，

∴直线PA、PB的方程分别为$y-3=\frac{y_0-3}{x_0-1}(x-1)$，$y-3=\frac{y_0-3}{x_0+1}(x+1)$

令$x=0$，得$M(0,\frac{3x_0-y_0}{x_0-1}),N(0,\frac{3x_0+y_0}{x_0+1})$，则$y_M\cdot y_N=\frac{3x_0-y_0}{x_0-1}\cdot\frac{3x_0+y_0}{x_0+1}=\frac{9x_0^2-y_0^2}{x_0^2-1}$（*）

因为点$P(x_0,y_0)$在圆C上，所以$x_0^2+y_0^2=10$，即$y_0^2=10-x_0^2$，代入（*）式

得$y_M\cdot y_N=\frac{9x_0^2-(10-x_0^2)}{x_0^2-1}=10$为定值．

3. 解：以点B为坐标原点，BP所在直线为x轴，建立如图所示平面直角坐标系，

则$B(0，0)$，$Q(45，15)$，$C(160，75)$．

过点B作直线l与圆Q相切，与圆C交于点M，N，

设l的方程为$y=kx$，即$kx-y=0$，

则点Q到l的距离为$\frac{|45k-15|}{\sqrt{k^2+1}}=15$，

解得$k=\frac{3}{4}$，或$k=0$（舍）．

所以直线l的方程为$y=\frac{3}{4}x$，即$3x-4y=0$．

……………………………………………4 分

点 $C(160，75)$到 l 的距离

$CH=\dfrac{|3\times160-4\times75|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=36$． ……………………………………………………………………6 分

因为在 $\mathrm{Rt}\triangle CHM$ 中，$CH=36$，$CM=72$，所以 $\cos\angle MCH=\dfrac{36}{72}=\dfrac{1}{2}$． …………8 分

又因为$\angle MCH\in(0，\dfrac{\pi}{2})$，所以$\angle MCH=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle MCN=2\angle MCH=\dfrac{2\pi}{3}$， ……12 分

所以所用时长为 $30\times\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=10\mathrm{min}$． ……………………………………………………13 分

答：该游客能看到点 B 的时长为 $10\mathrm{min}$． ………………………………………………14 分

4.【解析】（1）由题可得：$f'(x)=2x+(2-a)-\dfrac{a}{x}$，

所以 $f'(1)=2+(2-a)-a$，

又曲线 $y=f(x)$在 $x=1$处的切线斜率为 1，

所以 $f'(1)=2+(2-a)-a=1$，解得：$a=\dfrac{3}{2}$.

（2）$f'(x)=2x+(2-a)-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2+(2-a)x-a}{x}=\dfrac{2(x+1)\left(x-\frac{a}{2}\right)}{x}(x>0)$.

因为函数 $f(x)$的极小值不超过$\dfrac{a}{2}$，说明函数 $f(x)$有极小值，

则$\dfrac{a}{2}>0$，其极小值为$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}+(2-a)\times\dfrac{a}{2}-a\ln\dfrac{a}{2}\le\dfrac{a}{2}$，即：$\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}-\ln\dfrac{a}{2}\le 0$.

记$h(a)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}-\ln\dfrac{a}{2}$，上述不等式可转化成$h(a)\le 0$，

因为$h'(a)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{a}<0$恒成立，

所以$h(a)$在$(0,+\infty)$上递减，且易知当$a=2$时，$h(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4}-\ln\dfrac{2}{2}=0$，

要使得$h(a)\le 0$，则$h(a)\le h(2)$，

$\therefore a\ge 2$，

所以实数a的最小值为2.