例谈构造法解导数综合题的几种常用策略*

甘肃省永昌县第一高级中学　(737200)　赵忠平

导数综合问题是高考的热点和难点,涉及知识面广、综合性强,对能力要求较高,能较好地考查学生的思维能力,一般作为高考的压轴题目出现.解答这类题目往往需要用构造函数的技巧和方法,本文总结出运用"构造法"解导数综合问题的常用构造策略,供参考.

一、变形构造

例1　设函数 $f(x)=\ln(a-x)$,已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.(1)求 a;(2)设函数 $g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}$,证明 $g(x)<1$.

解:(1)$a=1$(过程略);(2)由(1)知 $f(x)=\ln(1-x)$,其定义域为 $(-\infty,1)$,当 $0<x<1$ 时,$\ln(1-x)<0$,此时 $xf(x)<0$,当 $x<0$ 时,$\ln(1-x)>0$,此时 $xf(x)<0$.故要证 $g(x)=\frac{x+f(x)}{xf(x)}<1$,只需证 $x+f(x)>xf(x)$,即证 $x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)>0$.

令 $F(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$.定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$,$F'(x)=-\ln(1-x)$.当 $x<0$ 时,$F'(x)<0$,当 $0<x<1$ 时,$F'(x)>0$,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,1)$ 上单调递增,所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$,即 $g(x)<1$ 恒成立.

评注:证明含分式的函数不等式时要先把分式型函数不等式等价转化成整式型函数不等式,再构造新函数,把一个复杂函数不等式问题变形为一个简单函数不等式.

二、局部构造

例2　已知函数 $g(x)=x^3+ax^2+bx(a,b\in R)$ 有极值,且函数 $f(x)=(x+a)e^x$ 的极值点是 $g(x)$ 的极值点,其中 e 是自然对数的底数.(极值点是指函数取得极值时对应的自变量的值)(1)求 b 关于 a 的函数关系式;(2)当 $a>0$ 时,若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值为 $M(a)$,证明:$M(a)<-\frac{7}{3}$.

解:(1)略;(2)因为 $F(x)=(x+a)e^x-(x^3+ax^2+bx)$,所以 $F'(x)=(x+a+1)(e^x-3x+a+3)$,令 $h(x)=e^x-3x+a+3$,则 $h'(x)=e^x-3$,令 $h'(x)=0$,解得 $x=\ln3$.所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln3)$ 上递减,在 $(\ln3,+\infty)$ 上递增,故 $x=\ln3$ 时,$h(x)$ 取得极小值,也是最小值,$h(\ln3)=e^{\ln3}-3\ln3+a+3=6-3\ln3+a=3\left(\ln\frac{e^2}{3}\right)+a>a>0$,令 $F'(x)=0$,解得 $x=-a-1$.当 $x=-a-1$ 时,$F(x)$ 取得极小值,也是最小值.$M(a)=F(-a-1)=-e^{-a-1}-(a+1)^2\cdot(a+2)$.令 $t=-a-1$,则 $t<-1$.设 $m(t)=-e^t-t^2(1-t)=-e^t+t^3-t^2,t<-1$,则 $m'(t)=-e^t+3t^2-2t,t<-1$,因为 $-e^{-1}<-e^t<0,3t^2-2t>5$,所以 $m'(t)>0$,所以 $m(t)$ 单调递增.所以 $m(t)<-e^{-t}-2<-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$,所以 $M(a)<-\frac{7}{3}$.

评注:如果导函数能化成积或商的形式,为了判断导数的符号可以把其中部分因式构造成新函数,通过对新函数求导,确定新函数的单调性和值域,从而得到对应因式的符号,体现从整体到局部分解问题,从局部到整体解决问题的思想方法.

三、分离参数构造

例3　已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$.(1)当 $a=2$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;(2)若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点,求 a 的取值范围.

解:(1)略;(2)曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点,等价于方程 $\frac{x^a}{a^x}=1(x>0)$ 有两个不同的解,即方程 $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$ 有两个不同的解.设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$,令 $g'(x)=0$,得 $x=e$.当 $0<x<e$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增,当 $x>e$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减.故 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,且当 $x>e$ 时,$g(x)\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.又 $g(1)=0$,所以 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$,所以 $a>1$ 且 $a\neq e$,即 a 的取值范围为 $(1,e)\cup(e,+\infty)$.

评注:对于含有参数的方程(不等式)问题,如果能够通过变形将参数和变量分离开来,构造不含

* 本文为 2020 年度甘肃省"十三五"教育科学规划课题:优化教学环节,构建"三段六环'一模多型'"高效数学课堂导学模式的实践研究(GS[2020]GHB1964)阶段性成果.

参数的新函数,通过研究新函数的单调性确定参数范围.分离参数是一种常见的解决方程根的问题的基本方法.

四、同构构造

例4　已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.若$f(x)\geqslant1$,求$a$的取值范围.

解:$f(x)\geqslant1$等价于$ae^{x-1}-\ln x+\ln a-1\geqslant0$,即$e^{\ln a+x-1}+\ln a-1\geqslant\ln x$,两边同时加$x$得$e^{\ln a+x-1}+\ln a-1+x\geqslant\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$.令$h(t)=e^t+t$,显然$h(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则不等式等价于$h(\ln a+x-1)\geqslant h(\ln x)$,等价于$\ln a+x-1\geqslant\ln x$,即$\ln a\geqslant\ln x-x+1$.令$g(x)=\ln x-x+1$,则$g'(x)=\frac{1-x}{x}$,所以$x\in(0,1)$时,$g(x)$单调递增,$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)$单调递减.故$[g(x)]_{\max}=g(1)=0$,所以$\ln a\geqslant0$,解得$a\geqslant1$.

评注:在含参数函数不等式恒成立求参数范围问题中,将不等式两边转化成同构式,根据同构式构造新函数,利用新函数单调性进一步转化问题,使得问题得到降维求解,此法虽然有一定难度,但能够发现命题人的命题路径及数学问题的本质.

五、　换元构造

例5　$h(x)=\ln x+bx$有两个不同的零点x_1和x_2.(1)求b的取值范围;(2)求证:$\frac{x_1x_2}{e^2}>1$.

解:(1)略;(2)由题意得$\ln x_1+bx_1=0$,$\ln x_2+bx_2=0$,$\ln x_1x_2+b(x_1+x_2)=0$,$\ln x_2-\ln x_1+b(x_2-x_1)=0$所以$\frac{\ln x_1x_2}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$,不妨设$x_1<x_2$,要证$x_1x_2>e^2$,只需证$\ln x_1x_2=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}(\ln x_2-\ln x_1)>2$,即证$\ln x_2-\ln x_1>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$.设$t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$,令$F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}=\ln t+\frac{4}{t+1}-2$,所以$F'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,所以函数$F(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,而$F(1)=0$,即$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$,所以$\frac{x_1x_2}{e^2}>1$.

评注:当要证明不等式中出现多个变量的时候,需要运用换元法将多元问题转化为一元问题,通过换元再构造关于新元的函数,将复杂的数学问题逐步转化为常规的数学问题,实现问题的求解.

六、放缩构造

例6　已知$f(x)=x\ln(x+a)+1(a<0)$.证明:$f(x)<e^x+\cos x$.

解:因为$a<0$,所以$x>-a>0$,$f(x)=x\ln(x+a)+1<x\ln x+1$,要证$f(x)<e^x+\cos x$,只需证$x\ln x<e^x+\cos x-1$.

(i)当$0<x\leqslant1$时,$e^x+\cos x-1>0$,$x\ln x<0$,所以$x\ln x<e^x+\cos x-1$成立;

(ii)当$x>1$时,$\because\cos x\geqslant-1$,所以只需证$e^x-x\ln x-2>0$,设$p(x)=e^x-x\ln x-2$,$p'(x)=e^x-\ln x-1$,$p''(x)=e^x-\frac{1}{x}$.显然$p''(x)$在$(1,+\infty)$上递增,$p''(x)\geqslant p''(1)=e-1>0$,所以$p'(x)$在$(1,+\infty)$递增,所以$p'(x)\geqslant p'(1)=e-1>0$,所以$p(x)$在$[1,+\infty)$上递增,所以$p(x)\geqslant p(1)=e-2>0$,所以$e^x-x\ln x-2>0$.

评注:证明函数不等式时可以将不等式的一边(两边)适当放大或缩小,然后再构造新函数求导研究新函数的性质,使得不等式得以证明.本题中还可以利用$e^x\geqslant x+1$,$\ln x\leqslant x-1$等进行放缩,将指数函数、对数函数转化为一次函数,能够使问题得到极大地简化.

关注解三角形中的最值问题

江苏省徐州市第三中学　(221005)　刘书霞

从近几年的高考数学试题三可以看出,每一类题型都有一到两个的把关题,此类题难度大、覆盖面广、对思维能力要求较高,很多同学因为它的阻挡无奈拉下一个档次.而关于解三角形中的求最值问题是经常充当如此角色的,下面就高考模拟题中出现的几个典型题例的改编题进行分析研判,探讨基本的解题途径,供参考.

一、利用二次函数求最值

例1　若不等式$k\sin^2B+\sin A\sin C>19\sin B\sin C$对任意$\Delta ABC$都成立,求实数$k$的最小值.

解析:在ΔABC中,由于$k\sin^2B+\sin A\sin C>19\sin B\sin C$,根据正弦定理得$kb^2+ac>19bc$,即$k>\frac{19bc-ac}{b^2}=\frac{c}{b}(19-\frac{a}{b})$恒成立,又在三角形中$c<a+$