江苏省仪征中学2021届高三数学考前保温训练（3）

班级____________姓名____________用时____________得分____________

一、单项选择题：

1．集合 $A=\{x\in \mathrm{N}\mid y=\log_4(x^3-8)\}$，集合 $B=\{y\in \mathrm{N}\mid y=2^{|x-1|},x\in \mathrm{R}\}$，则 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=$（　）

A．$(0,2]$　　B．$(-1,2]$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2\}$

2．行列式是近代数学中研究线性方程的有力工具，其中最简单的二阶行列式的运算定义如下：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\begin{vmatrix} 1 & (10-a_7) \\ 1 & a_9 \end{vmatrix}=0$，则 $S_{15}=$（　）

A．$\dfrac{15}{2}$　　B．45　　C．75　　D．150

3．已知 $1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，$M=a^a,N=a^b,P=b^a$，则 M,N,P 的大小关系正确的为（　）

A．$N<M<P$　　B．$P<M<N$　　C．$M<P<N$　　D．$P<N<M$

4．若将函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后得到的图象关于 y 轴对称，则函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为（　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．1　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题：

5．某鱼业养殖场新进1000尾鱼苗，测量其体长(单位：毫米)，将所得数据分成6组，其分组及频数情况如下表：

分组(单位：毫米)	$[70,75)$	$[75,80)$	$[80,85)$	$[85,90)$	$[90,95)$	$[95,100)$
频数	100	100	m	350	150	n

已知在按以上6个分组做出的频率分布直方图中，$[95,100)$ 分组对应小矩形的高为0.01，则下列说法正确的是（　）

A．$m=250$

B．鱼苗体长在 $[90,100)$ 上的频率为0.16

C．鱼苗体长的中位数一定落在区间 $[85,90)$ 内

D．从这批鱼苗中有放回地连续抽取50次，每次一条，则所抽取鱼苗体长落在区间 $[80,90)$ 上的次数的期望为30

6．在平面直角坐标系中，$A(t,\dfrac{2}{t}),B(8-m,8-\dfrac{3}{2}m),C(7-m,0)$，$O$ 为坐标原点，P 为 x 轴上的动点，则下列说法正确的是（　）

A．$|\overrightarrow{OA}|$ 的最小值为2

B．若 $t=1$，$m=4$，则 ΔABC 的面积等于4

C．若 $t=1$，$m=4$，则 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为5

D．若 $t=\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，且 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $m\in(-\infty,5)$

三、填空题：

7．若 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5},\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\cos 2\alpha=$________；

8．定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的"新驻点"，若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x$，$h(x)=\ln 2x$，$\varphi(x)=\sin x\,(0<x<\pi)$ 的"新驻点"分别为 α,β,γ，则 α,β,γ 的大小关系为________．

四、解答题：

9．在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$c\cos A=(\sqrt{2}b-a)\cos C$．

（1）若 $A=\frac{\pi}{12}$，点 D 在边 AB 上，$AD=BC=1$，求 ΔBCD 的外接圆的面积；

（2）若 $c=2$，求 ΔABC 面积的最大值．

10．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线 C 上不同两点 M,N 同时满足下列三个条件中的两个：

①$|FM|+|FN|=|MN|$；②$|OM|=|ON|=|MN|=8\sqrt{6}$；③直线 MN 的方程为 $y=6p$．

（1）请分析说明两点 M,N 满足的是哪两个条件？并求抛物线 C 的标准方程；

（2）若直线 l 与抛物线 C 相切于点 P，l 与椭圆 $D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A,B 两点，l 与直线 $y=-\sqrt{2}$ 交于点 Q，以 PQ 为直径的圆与直线 $y=-\sqrt{2}$ 交于 Q,Z 两点，求证：直线 OZ 经过线段 AB 的中点．

江苏省仪征中学2021届高三数学考前保温训练（3）

参考答案及评分标准

一、单项选择题：

1. D　2. C　3. B　4. A

二、多项选择题：

5. ACD　6. ACD

三、填空题：

7. $-\dfrac{24}{25}$；**8.** $\gamma<\alpha<\beta$.

四、解答题：

9．解：（1）由 $c\cos A=(\sqrt{2}b-a)\cos C$ 得：$\sqrt{2}b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

所以 $\sqrt{2}\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$

又 $A=\dfrac{\pi}{12}$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$

在 ΔABC 中，由 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$ 可得：$AB=\dfrac{BC\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\sqrt{3}+1$，

因为 $AD=1$，所以 $BD=\sqrt{3}$

在 ΔBCD 中，$B=\dfrac{2\pi}{3}$，

由余弦定理得：$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos B=4+\sqrt{3}$

设 ΔBCD 外接圆的半径为 R，

由 $\dfrac{CD}{\sin B}=2R$ 可得：$R=\dfrac{CD}{2\sin B}$

所以 ΔBCD 外接圆的面积 $S=\pi R^2=\dfrac{\pi\cdot CD^2}{4\sin^2 B}=\dfrac{(4+\sqrt{3})\pi}{4\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\pi$

（2）由（1）可知 $C=\dfrac{\pi}{4}$，又 $c=2$，

由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $a^2+b^2-\sqrt{2}ab=4$

因为 $a^2+b^2\geq 2ab$，所以 $a^2+b^2-\sqrt{2}ab=4\geq 2ab-\sqrt{2}ab=(2-\sqrt{2})ab$

从而 $ab\leq\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}=4+2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号)

所以 ΔABC 面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C\leq\dfrac{1}{2}\times(4+2\sqrt{2})\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}+1$

从而 ΔABC 面积 S 的最大值为 $\sqrt{2}+1$

10．解：（1）若同时满足条件①②：

由①$|FM|+|FN|=|MN|$知MN过焦点$F(0,\frac{p}{2})$

当$|OM|=|ON|$时，$|MN|=2p$，而$|OM|=|ON|=\frac{\sqrt{5}}{2}p\neq|MN|$

所以①②不同时成立

若同时满足条件①③：

由①$|FM|+|FN|=|MN|$知MN过焦点$F(0,\frac{p}{2})$

显然，直线$y=6p$不可能过焦点$F(0,\frac{p}{2})$

所以①③不同时成立

只能同时满足条件②③

因为$|OM|=|ON|=|MN|=8\sqrt{6}$，且直线MN的方程为：$y=6p$

所以$6p=12\sqrt{2}$，解得$p=2\sqrt{2}$

抛物线C的标准方程为：$x^2=4\sqrt{2}y$

（2）设$P(t,\frac{t^2}{4\sqrt{2}})$，因为抛物线$C:x^2=4\sqrt{2}y$，所以$y'=\frac{x}{2\sqrt{2}}$

直线AB的斜率$k_{AB}=\frac{t}{2\sqrt{2}}$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB中点为G，所以$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{2}=1$

两式作差得：直线OG的斜率$k_{OG}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{2(x_1-x_2)}{4(y_1-y_2)}=-\frac{1}{2k_{AB}}=-\frac{\sqrt{2}}{t}$

因为PQ为直径，所以$QZ\perp PZ$，

从而$Z(t,-\sqrt{2})$，直线OZ的斜率$k_{OZ}=-\frac{\sqrt{2}}{t}$

所以$k_{OG}=k_{OZ}$，所以O,G,Z共线，

所以直线OZ经过线段AB的中点