

江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (35)

2019 年 11 月 29

班级_____姓名_____学号_____评价_____

请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 若 $a > 0, b > 2$ ，且 $a + b = 3$ ，则使得 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b-2}$ 取得最小值的实数 $a =$ _____.

2. 已知函数 $f(x) = x(2^x - 2^{-x})$ ，则不等式 $f(-2) < f(\lg x)$ 的解集为

3. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x} (m \in \mathbf{R})$ 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4，则 $m =$ _____.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $x - 3y - 10 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$

相切. (1) 直线 l 过点 $(2, 1)$ 且截圆 O 所得的弦长为 $2\sqrt{6}$ ，求直线 l 的方程；

(2) 已知直线 $y = 3$ 与圆 O 交于 A, B 两点， P 是圆上异于 A, B 的任意一点，且直线 AP, BP 与 y 轴相交于 M, N 点. 判断点 M, N 的纵坐标之积是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

1. $\frac{2}{3}$

2. $(0, \frac{1}{100}) \cup (100, +\infty)$

3. 解析: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2} = \frac{x+m}{x^2}$, 令 $f(x) = 0$, 则 $x = -m$, 且当 $x < -m$ 时, $f(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > -m$ 时, $f(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 若 $-m \leq 1$, 即 $m \geq -1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = -m \leq 1$, 不可能等于 4; 若 $1 < -m \leq e$, 即 $-e \leq m < -1$ 时, $f(x)_{\min} = f(-m) = \ln(-m) + 1$,

令 $\ln(-m) + 1 = 4$, 得 $m = -e^3 \notin (-e, -1)$; 若 $-m > e$, 即 $m < -e$ 时,

$f(x)_{\min} = f(e) = 1 - \frac{m}{e}$, 令 $1 - \frac{m}{e} = 4$, 得 $m = -3e$, 符合题意. 综上 $m = -3e$.

4. 解: $\because$ 直线 $x - 3y - 10 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切

$\therefore$ 圆心 O 到直线 $x - 3y - 10 = 0$ 的距离为 $r = \frac{|10|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10}$.

(1) 记圆心到直线 l 的距离为 d , 所以 $d = \sqrt{10 - 6} = 2$.

当直线 l 与 x 轴垂直时, 直线 l 的方程为 $x = 2$, 满足题意; 当直线 l 与 x 轴不垂直

时, 设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, 即 $kx - y + (1 - 2k) = 0$,

所以 $d = \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$, 解得 $k = -\frac{3}{4}$, 此时直线 l 的方程为 $3x + 4y - 10 = 0$ 综上,

直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $3x + 4y - 10 = 0$.

(2) 设 $P(x_0, y_0)$. $\because$ 直线 $y = 3$ 与圆 O 交于 A, B 两点, 不妨取 $A(1, 3), B(-1, 3)$,

$\therefore$ 直线 PA, PB 的方程分别为 $y - 3 = \frac{y_0 - 3}{x_0 - 1}(x - 1)$, $y - 3 = \frac{y_0 - 3}{x_0 + 1}(x + 1)$

令 $x=0$, 得 $M(0, \frac{3x_0 - y_0}{x_0 - 1}), N(0, \frac{3x_0 + y_0}{x_0 + 1})$, 则 $y_M \cdot y_N = \frac{3x_0 - y_0}{x_0 - 1} \cdot \frac{3x_0 + y_0}{x_0 + 1} = \frac{9x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 - 1}$

(*) 因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 C 上, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 10$, 即 $y_0^2 = 10 - x_0^2$, 代入 (*) 式

得 $y_M \cdot y_N = \frac{9x_0^2 - (10 - x_0^2)}{x_0^2 - 1} = 10$ 为定值.