

# 从“三角与三角函数”考点看高考中的 “数学运算”核心素养

——以2016—2019四年高考理科全国卷I卷为例

邱婉珠 周仕荣

(闽南师范大学数学与统计学院 363000)

## 1 前言

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《新课标》<sup>[1]</sup>)以六大数学学科核心素养为主题,分别是数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析,并且新课标强调数学学科核心素养是育人价值的集中体现,是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观念、必备品格和关键能力.笔者发现,其中“数学运算”核心素养几乎贯穿于其他五个数学学科核心素养中,是数学学科核心素养的基本成分,是高考中考查比例最大的一个核心素养.那么在高考全国卷中对考生关于“数学运算”核心素养的考查,基于“SOLO分类理论”的划分水平如何分布?《新课标》中“四基”所呈现的数学知识考点如何体现?如何通过“SOLO分类理论”,如何结合“四基”所体现的数学知识考点,来看高考卷对学生的“数学运算”核心素养的考查情况?由于全国除了海南采取半自主命题,浙江、上海、江苏、北京、天津采取自主命题外,其余省份陆续于2016年采用全国卷,其中河北、安徽、湖北、福建、湖南、山西、江西、广东、河南、山东从2016年开始都采用了全国I卷对当地高考考生进行数学学业质量检测.故本文将“三角与三角函数”这一处于高考中的重要考点为例来分析2016—2019四年高考理科全国I卷对高考考生的“数学运算”这一学科核心素养的考查情况.其中《新课标》所指的“四基”是基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验;“SOLO分类理论”划分为前结构水平、单一结构水平、多元结构水平、关联结构水平、扩展结构水平.通过“四基”所体现的数学知识考点,来看高考卷所考查的“数

学运算”核心素养处于“SOLO分类理论”的哪一结构水平,通过了解“数学运算”核心素养的内涵、“四基”以及“SOLO分类理论”等相关概念知识以及它们之间的联系,结合历年高考真题,对高考关于“三角与三角函数”的相关试题进行全面的分析,来看高考中的“数学运算”核心素养,并给出积极教学、提升学生“数学运算”核心素养的几点建议.

## 2 相关概念知识

### 2.1 “数学运算”核心素养的内涵

“数学运算”<sup>[1]</sup>是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的数学学科核心素养.主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思路,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果.“数学运算”是解决数学问题的基本手段,是演绎推理、计算机解决数学问题的基础.通过高中数学课程的学习,培养学生的“数学运算”核心素养能进一步发展学生的数学运算能力;能有效借助数学运算方法解决实际问题;能促进数学思维发展,培养学生形成规范化的思考问题的优秀品质,帮助学生养成一丝不苟、严谨求实的科学精神.

“数学运算”并不是简单的数学计算能力,“数学运算”主要是对运算对象、运算法则、运算思路、运算方法的理解、掌握、探究和选择,提升学生的“数学运算”核心素养显得尤为重要.

### 2.2 “四基”与“SOLO分类理论”

“四基”<sup>[1]</sup>是由原本数学基础教育中的“双基”提法,被在2011年12月28日教育部颁布的《义务教育数学课程标准(2011年版)》<sup>[2]</sup>发展出来的

提法。“双基”侧重的是熟练掌握已有的知识和技能,而忽视了创新人才的培养.由此,《新课标》指出由原本仅有的知识与技能的“双基”发展为基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验的“四基”.通过“四基”对高考试题的有关“三角与三角函数”进行分析,来看高考试题关于“三角与三角函数”的数学知识考点.

“SOLO分类理论”<sup>[3]</sup>是“观察到的学习结果的结构”(Structure of the Observed Learning

Outcome)的缩写.“SOLO分类理论”是对抽象程度和题目结构上的复杂程度的层次划分,分为5个水平,即前结构水平、单一结构水平、多元结构水平、关联结构水平和拓展抽象水平.本文笔者将类比“SOLO分类理论”对2016—2019四年全国理科高考I卷有关“三角与三角函数”的试题进行层次划分,由于“前结构水平”在具体的试题操作中无法体现,因此只选取后四个“SOLO分类理论”进行类比分析:

表1 试题所考查的SOLO层次划分

SOLO层次划分	对应水平特征	例题
单一结构水平 (U)	学生能找到解决问题的一个知识点,并且能根据这个知识点解决问题,对“数学运算”核心素养的要求比较低	求函数 $y = \sin 2x, x \in \mathbf{R}$ 的周期.
多元结构水平 (M)	学生能找到解决问题的多个知识点,但不需要把这些知识点进行整合就能解决问题,对“数学运算”核心素养的要求中等	求函数 $y = \frac{2}{3} \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ 的周期性和单调性.
关联结构水平 (R)	学生能找到解决问题的多个知识点,并且需要把这些知识点整合起来,才能得出正确的答案,对“数学运算”核心素养的要求较高	已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ , 求 $f(x)$ 的最小值
拓展抽象水平 (E)	学生不仅能够对问题进行抽象概括,从理论的高度来分析问题,而且能够深化问题,归纳出新的更抽象的知识,得出开放性的答案,对“数学运算”核心素养的要求高	已知向量 $m = (3\sin x, \cos x), n = (-\cos x, \sqrt{3}\cos x)$ , $f(x) = m \cdot n - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 若方程 $f(x) = a$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的实数根, 求实数 $a$ 的取值范围.

笔者通过类比“SOLO分类理论”得到上述表1的对高考有关“三角与三角函数”试题所考查的SOLO层次划分的方法,结合“四基”所说的知识考点,对近四年的高考理科全国I卷有关“三角与三角函数”的试题分布情况、客观题、解答题分别

进行分析,来讨论高考卷对“数学运算”核心素养所考查的层次水平情况.

### 3 试题分析

#### (1) 试题分布情况

表2 “三角与三角函数”在2016—2019四年高考理科全国I卷的分布情况

题 型 \ 年 份	2016	2017	2018	2019
客观题	12	9	16	11
解答题	17	17	17	17、20

在这里首先对近四年的高考理科全国I卷的有关“三角与三角函数”的试题题型的分布情况进行分析.由表2可以看出,2016—2018有关“三角

与三角函数”的考查相对比较稳定,均是一道客观题(5分)加上一道解答题(12分),并且这三年的有关“三角与三角函数”解答题部分均分布在解答

题的第一道题. 2019年对有关“三角与三角函数” 分值12分.  
考点的考查在原来的基础上增加了一道解答题, (2)客观试题考查情况

表3 “三角与三角函数”在2016—2019四年高考理科全国I卷的客观题考查情况

年份 四基	2016	2017	2018	2019
基础知识	三角函数的性质	三角函数图像及其变换	三角函数式的求值	三角函数的性质
基本技能	三角函数的周期、单调性、零点及图像的对称轴的应用	诱导公式、三角函数图像变换的应用	二倍角公式的应用	三角函数的奇偶性、单调性、零点、极值的应用
基本思想	化归转化思想	化归转化思想	方程与函数思想	方程与函数思想
基本活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验

表4 “三角与三角函数”在2016—2019四年高考理科全国I卷客观题的SOLO层次划分

年份	2016	2017	2018	2019
SOLO层次划分	E	R	R	R

由表3可以看出,“三角与三角函数”在近四年的高考理科全国I卷,主要是通过“四基”的数学知识考点的具体体现,对《新课标》提出的六大数学学科核心素养中的“数学运算”核心素养的考查.从基础知识来看,近四年主要考查三角函数的性质、图像及其变换与求值.从基本技能来看,近四年主要考查三角函数的性质、公式、图像变换等解决数学问题的技能.从基本思想来看,近四年的考查比较集中于化归转化思想、方程与函数思想.王新民教授<sup>[4]</sup>曾提出,基于对数学基本活动的认识,我们认为可以把演绎活动经验和归纳活动经验称之为数学基本活动经验.由此,笔者根据王新民教授的说法,将基本活动经验分为演绎活动经验与归纳活动经验.由表3可以看出“数学运算”核心素养,关于“三角与三角函数”的客观题的考查主要经历的是演绎活动的经验,这是由于近四年对“三角与三角函数”的考查主要是考查学生对已学的基本知识、基本技能、基本思想的应用,因此笔者认为学生所经历的基本活动经验主要是演绎活动经验.

由表4可以看出,2016年通过三角函数的周期性、单调性、零点、对称性对三角函数的性质进行综合性的考查,根据“SOLO层次划分”属于需要从已知信息中抽象、归纳进行解题的复杂问题,对“数学运算”核心素养的要求高的拓展结构水

平.2019年虽然也类似地通过三角函数的奇偶性、单调性、零点、极值对学生关于三角函数的性质进行检验,但只需要多个知识点彼此整合就能对题目所给的四个选项的正确性进行判断,因此属于关联结构水平.以此类推,2017年、2018年属于关联结构水平.一起来看2019年一道关于“三角与三角函数”的客观题:

(2019 课标全国 I,11,5 分)关于函数  $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$  有下述四个结论:

①  $f(x)$  是偶函数,②  $f(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  单调递增,③  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  有四个零点,④  $f(x)$  的最大值为 2;

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④      B. ②④  
C. ①④      D. ①③

这道题主要考查的是三角函数的性质.其中,①考查的是三角函数的奇偶性;②考查的是三角函数的单调性;③考查的是零点;④考查的是最值.解答此题,不仅需要掌握这四个知识点,同时还需要熟悉他们之间的内在联系.例如③,先判断在区间  $[0, \pi]$  上函数为  $f(x) = 2\sin x$  有两个零点,分别是 0 和  $\pi$ ;再根据①  $f(x)$  是偶函数可知,  $f(x)$  图像关于  $y$  轴,从而得出  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  只有 3 个零点,分别是  $-\pi, 0, \pi$ ,从而得知③是错误的.

的.故笔者将该题归入试题所考查的 SOLO 层次划分的关联结构水平.

笔者对近四年的全国高考理科 I 卷有关“三角与三角函数”的客观题通过“四基”所体现的数学知识考点进行分析,来看客观题关于“SOLO 分

类理论”的分布情况,进而分析高考卷所考查的“数学运算”核心素养.经分析发现,全国高考理科 I 卷对“三角与三角函数”的客观题考查基本处于关联结构水平,对“数学运算”核心素养要求较高.

### (3)解答试题考查情况

表 5 “三角与三角函数”在 2016—2019 四年高考理科全国 I 卷的解答题考查情况

年份 四基	2016	2017	2018	2019(17)	2019(20)
基础知识	正弦、余弦定理	正弦、余弦定理	正弦、余弦定理	正弦、余弦定理	三角函数的性质
基本技能	正弦定理、余弦定理的应用,三角形面积公式的应用	正弦、余弦定理,三角形面积公式及两角和的余弦公式的应用	正弦、余弦定理及诱导公式的应用	正弦定理、余弦定理的应用以及三角恒等变换的应用	三角函数的单调性、零点、极值的应用
基本思想	化归转化思想	化归转化思想	化归转化思想	化归转化思想	方程与函数的思想
基本活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验	演绎活动经验

表 6 “三角与三角函数”在 2016—2019 四年高考理科全国 I 卷解答题的 SOLO 层次划分

年份	2016	2017	2018	2019(17)	2019(20)
SOLO 层次划分	R	R	R	R	E

表 5 是通过“三角与三角函数”在 2016—2019 四年高考理科全国 I 卷的解答题考查情况来看新课标提出的“数学运算”核心素养.由表 5 我们发现 2016—2018 年均只有一道解答题,分值 12 分,2019 年考查了两道解答题,分值 24 分.在这里先对 2016—2019(17)解答题进行分析.由于 2016—2018 年关于“三角与三角函数”的解答题考查均只有一道题,因此只需要通过年份对其题目进行区分,2019 年对解答题的考查有两道题,因此笔者在年份后面的括号里面添加题号对 2019 年考查的两道关于“三角与三角函数”的试题进行区分,例如 2019(17)指的是 2019 年的 17 题.从基础知识来看,近四年均对正弦定理与余弦定理的考查;从基本技能来看,主要是考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换以及三角形面积公式、余弦公式、诱导公式等解决问题的能力;从基本思想来看,均需要化归转化思想解决数学问题;基本活动经验主要是演绎活动经验.

由表 6 可以看出 2016—2019(17)解答题这四道题考查的相对比较稳定,根据“SOLO 层次划分”均属于关联结构水平,均需要多个的知识点彼

此整合解决的问题,对“数学运算”核心素养的要求较高.而 2019(20)试题较复杂,需要从已知信息中抽象、归纳进行解题的复杂问题,对“数学运算”核心素养的要求高,属于拓展结构水平.一起来看 2019 年关于“三角与三角函数”的两道解答题:

(2019 课标全国 I, 17, 12 分)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 设  $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$ .

(1)求  $A$ ;

(2)若  $\sqrt{2}a + b = 2c$ , 求  $\sin C$ .

这道题主要考查的是通过化归转化思想对正弦定理、余弦定理的应用以及三角恒等变换的应用来凸显学生的演绎活动经验.求解(1)时,需要正弦定理得到:  $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ , 再利用余弦定理求出  $A$ ; 求解(2)时,由(1)中得到  $A = \frac{\pi}{3}$  及正弦

定理得:  $\sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 可解得  $C$  的值, 再根据两角和的正弦函数公式得到  $\sin C$ . 由此可以看出, 该题需要多个知识点整合起来进行解答, 是对

相关公式、定理的综合考查,对“数学运算”核心素养的要求比较高.因此,笔者将该题归入试题所考查的 SOLO 层次划分的关联结构水平.

(2019 课标全国 I, 20, 12 分) 已知函数  $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数. 证明:

(1)  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{2})$  存在唯一极大值点;

(2)  $f(x)$  有且仅有 2 个零点.

这道题主要考查利用导数求函数的极值, 考查函数零点的判定, 考查数学转化思想方法, 考查函数与方程思想, 考查逻辑思维能力和推理运算能力的结合. 在解答(1)时, 先确定  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ , 求出原函数的导数, 进一步求导, 得到  $f''(x)$  在  $(-1, \frac{\pi}{2})$  上为减函数, 结合  $f''(0) = 1$ ,  $f''(\frac{\pi}{2}) = -1 + \frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2} < -1 + 1 = 0$ , 由零点

存在定理可知, 函数  $f''(x)$  在  $(-1, \frac{\pi}{2})$  上存在唯一得零点  $x_0$ , 结合单调性可得,  $f'(x)$  在  $(-1, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减, 可得  $f'(x)$

在区间  $(-1, \frac{\pi}{2})$  存在唯一极大值点. 这一小问需要“三角与三角函数”单调性、零点与极值点彼此关联解决问题, 对“数学运算”核心素养的要求较高, 试题所考查的 SOLO 层次划分的是关联结构水平. 在解答(2)时, 结合(1)得知, 当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 由于  $f'(x)$  在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减, 且  $f'(x_0) > 0$ ,  $f'(\frac{\pi}{2}) < 0$ ,

可得函数  $f'(x)$  在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上存在唯一零点  $x_1$ , 结合单调性可知, 当  $x \in (x_0, x_1)$  时,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (x_1, \frac{\pi}{2})$  时,  $f(x)$  单调递减. 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

时,  $f(x)$  单调递减, 再由  $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $f(\pi) < 0$ . 然后列出  $x$ ,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况表得出答案. 第二小问试题较复杂, 需要从(1)中进行抽象、归纳, 再结合单调性、零点通过列表进行解题的复杂问

题, 对“数学运算”核心素养的要求高, 属于试题所考查的 SOLO 层次划分的拓展结构水平.

笔者对近四年的全国高考理科 I 卷有关“三角与三角函数”的解答题分析依旧是依据“四基”所体现的数学知识考点, 来看解答题关于“SOLO 分类理论”的分布情况, 从而来看高考中的“数学运算”核心素养的考查情况. 经分析发现, 全国高考理科 I 卷对“三角与三角函数”的解答题考查基本处于关联结构水平, 未来考查趋势将维持关联结构水平, 且有向拓展结构水平发展的趋势, 对“数学运算”核心素养的考查有上升的趋势.

## 4 结论和建议

### 4.1 结论

(1) 对“三角与三角函数”的考查基本处于关联结构水平

根据上述对试题的分析和知识点所考查的 SOLO 划分层次得到如下结论: 近四年的高考理科全国 I 卷对客观题考查部分, 关于“数学运算”核心素养的考查, 除 2016 年是拓展结构水平外, 近三年基本处于关联结构水平; 对于解答题部分, 关于数学运算学科核心素养的考查基本处于关联结构水平. 在这里为什么说的是“基本”, 是因为 2019 年的解答题 20 题也对三角函数的相关性质做了考查, 并且该题是需要从已知信息中抽象、归纳进行解题的复杂问题, 属于拓展结构水平. 笔者通过对 2016—2018 年高考理科全国 I 卷的类似题型进行分析发现, 该题型均分布在解答题 21 题部分, 主要是对导数的应用进行考查, 考查函数的单调性、极值、最值的问题, 一般以基本初等函数为载体, 难度均属于拓展结构水平. 而在 2019 年的解答题 20 题, 与往年考查的大方向没有变, 依然是对导数的应用的考查, 只是在这里的函数涉及到了三角函数, 考查难度依然处于拓展结构水平. 因此, 近四年的高考理科全国 I 卷在客观题和解答题部分基本处于关联结构水平.

(2) 未来考查趋势维持关联结构水平, 且有向拓展结构水平发展的趋势

根据上述对试题进行的分析, 再结合 4.1 的结论, 我们发现在近四年的客观题部分考查的知识点相对比较灵活, 主要是对三角函数的图像及其变换, 诱导公式、二倍角公式、三角函数的恒等变换, 以及对三角函数的单调性、奇偶性、周期性、

对称性以及最值等有关三角函数性质问题的考查,考查试题的灵活多变,而又不偏离新课标对学生提出的“数学运算”核心素养的提升的目标,有利于学生创新思维的培养,达到了新课标的要求.在解答题部分,17题重点考查正弦定理、余弦定理以及三角函数面积公式的应用,对三角形内角和定理、三角函数的诱导公式、同角三角函数的基本关系以及两角和与差的三角函数公式的灵活考查,考生需根据题目中的已知条件和要求的元素确定所要求解的三角形,严格达到了新课标关于理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思路,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果的“数学运算”核心素养的要求.随着新课标的提出以及逐步的完善,科技的不断发展,对学生的“数学运算”核心素养的要求越来越高,由2019(20)可以看出,关于“三角与三角函数”对学生“数学运算”核心素养的考查有向拓展结构水平发展的趋势.因此笔者认为未来对于“三角与三角函数”关于“数学运算”核心素养的考查趋势维持关联结构水平,且有向拓展结构水平发展的趋势.

#### 4.2 建议

(1)加强“数学运算”核心素养与数学文化的结合

由上述结论可知,对“三角与三角函数”的考查基本处于关联结构水平,未来的考查层次维持关联结构水平,并且有向拓展结构水平拓展的趋势.这显示出对学生的“数学运算”核心素养的考查要求较高,并且要求有再提高的趋势.这使得“数学运算”核心素养与数学文化的结合显得尤为重要,通过数学文化的结合,对抽象的数学知识追本溯源,提高学生的趣味性、积极性,有利于学生创新思维的培养,有利于学生的“数学运算”核心素养向拓展结构水平发展.

新课标明确指出数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展;还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动.我们应加强“数学运算”核心素养与数学文化的结合,“数学运算”核心素养主要是对运算对象,运算方法,运算程序,运算结果等的考核,若与数学文化相分离会割裂了数学的整体性,原本血肉丰满的数学只剩下“骷髅”式的知识骨架,进而也就失去了数

学和数学教育的“灵魂”.对于还处在应试教育的当代,若未能将“数学运算”核心素养与数学文化结合,关于数学文化的传承极易被教师们所遗忘.为了让学生能够站在数学思想的高度体会数学的本质,为了数学回归育人应有的样子,应加强“数学运算”核心素养与数学文化的结合.

(2)倡导教师积极教学,提升学生“数学运算”核心素养

由上述试题分析得知,近四年经笔者了解,考生的解题情况并不理想.了解发现,学生对有关“三角与三角函数”的全国高考理科I卷对关于“三角与三角函数”的“数学运算”核心素养的考查难度基本处于关联结构水平,对“数学运算”核心素养的要求较高.有关“三角与三角函数”的知识点基本都熟记于心,但却不能在答卷中很好的表征出来.究其原因,学生不能将零碎的知识在脑海中表征,建立有机的联系形成一个知识系统对问题进行求解.

倡导教师积极教学,教师在讲授新课时,应该将概念讲透讲清楚;加强概念教学,注重概念的引入,分析概念的含义,了解概念的本质,掌握概念的内涵和外延,从多方面入手,加深学生对概念的理解.让学生能在概念与概念之间能够建立联系,教师应该帮助学生对相关知识点制作思维导图使零散的知识点建立起直观的联系;教师在讲习题课时,应该将习题所涉及到的知识点、思想方法讲清楚讲明白.不提倡教师要求学生做题海战术,毕竟万事万物过犹不及,学生刷题刷多了,在一定程度上会形成机械式的答题思路,当遇到灵活点的题目时就无从下手.倡导教师积极教学,提升学生“数学运算”核心素养,维持关联结构水平并向拓展结构水平迈进.

#### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版)[M]. 北京:北京师范大学出版社,2012
- [3] 鲍建生,周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海:上海教育出版社,2009
- [4] 王新民,王富英,王亚雄. 数学“四基”中“基本活动经验”的认识与思考[J]. 数学教育学报,2008(03):17-20