江苏省仪征中学2019届高三（上）期中专题复习-------图形背景的应用题的解法

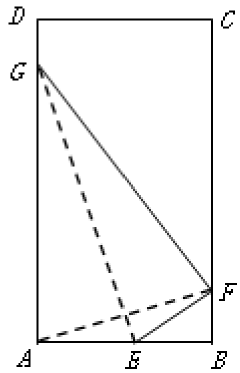
班级________ 姓名________ 学号________ 评价________

一、典例回顾：

如图所示，有一块矩形空地 $ABCD$， $AB=2$ km， $BC=4$ km，根据周边环境及地形实际，当地政府规划在该空地内建一个筝形商业区 $AEFG$，筝形的顶点 A,E,F,G 为商业区的四个入口，其中入口 F 在边 BC 上（不包含顶点），入口 E,G 分别在边 AB,AD 上，且满足点 A,F 恰好关于直线 EG 对称，矩形内筝形外的区域均为绿化区.

（1）请确定入口 F 的选址范围；

（2）设商业区的面积为 S_1，绿化区的面积为 S_2，商业区的环境舒适度指数为 $\frac{S_2}{S_1}$，则入口 F 如何选址可使得该商业区的环境舒适度指数最大？



方法1.

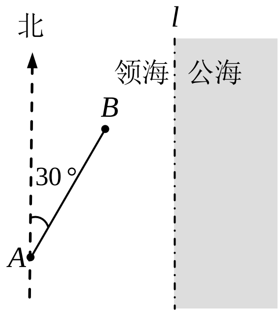
方法2.

二、例题探究：

例 1. 一缉私艇巡航至距领海边界线 l（一条南北方向的直线）3.8 海里的 A 处，发现在其北偏东 $30°$方向相距 4 海里的 B 处有一走私船正欲逃跑，缉私艇立即追击．已知缉私艇的最大航速是走私船最大航速的 3 倍．假设缉私艇和走私船均按直线方向以最大航速航行．

（1）若走私船沿正东方向逃离，试确定缉私艇的追击方向，使得用最短时间在领海内拦截成功；（参考数据：$\sin 17 \approx \frac{\sqrt{3}}{6}$，$\sqrt{33} \approx 5.7446$）

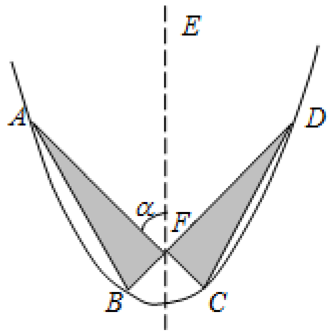
（2）问：无论走私船沿何方向逃跑，缉私艇是否总能在领海内成功拦截？并说明理由．



例 2．某人欲设计一个如图所示的“蝴蝶形图案（阴影区域）”其中AC,BD是过抛物线焦点F且互相垂直的两条弦，该抛物线的对称轴为EF，通径长为 4．记$\angle EFA=\alpha$，α为锐角．（**通径**：经过抛物线焦点且垂直于对称轴的弦）

（1）用α表示AF的长；

（2）试建立“蝴蝶形图案”的面积S关于α的函数关系式，并设计α的大小，使“蝴蝶形图案”的面积最小．



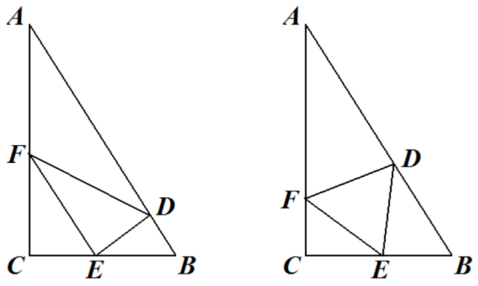
三、课堂小结：

四、拓展延伸：

某个公园有个池塘，其形状为直角△ABC，$\angle C=90^\circ$，AB＝2 百米，BC＝1 百米.

（1）现在准备养一批供游客观赏的鱼，分别在 AB、BC、CA 上取点 D，E，F，如图（1），使得 $EF//AB$，$EF\perp ED$，为方便游客喂食，观赏鱼放养在△DEF 内，求△DEF 面积 S 的最大值；

（2）现在准备新建造一个荷塘，分别在 AB，BC，CA 上取点 D，E，F，如图（2），建造△DEF 连廊（不考虑宽度）供游客休憩，且使△DEF 为正三角形，求△DEF 边长的最小值.

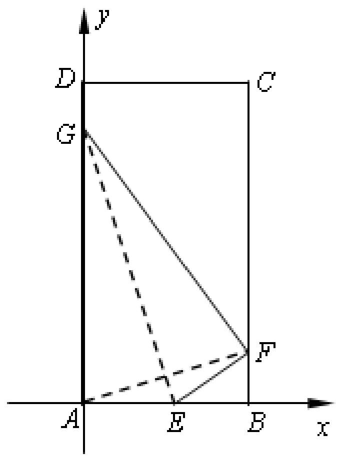


图（1）　　图（2）

一、典例回顾：

解：（1）以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，

设 $F(2,2a)$（$0<2a<4$），则 AF 的中点为 $(1,a)$，斜率为 a，



而 $EG \perp AF$，故 EG 的斜率为 $-\dfrac{1}{a}$，

则 EG 的方程为 $y-a=-\dfrac{1}{a}(x-1)$，

令 $x=0$，得 $y_G=a+\dfrac{1}{a}$；……………2 分

令 $y=0$，得 $x_E=1+a^2$；……………4 分

由 $\begin{cases}0<y_G\le 4\\0<x_E\le 2BF\\0<BF<4\end{cases}$，得 $\begin{cases}2-\sqrt{3}\le a\le 2+\sqrt{3}\\0<a\le 1\\0<a<2\end{cases}$，

$\therefore 2-\sqrt{3}\le a\le 1$，

即入口 F 的选址需满足 BF 的长度范围是 $[4-2\sqrt{3},2]$（单位：km）．……………6 分

（2）因为 $S_1=2S_{\Delta AEG}=AE\cdot AG=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)(1+a^2)=a^3+2a+\dfrac{1}{a}$，

故该商业区的环境舒适度指数 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S_{ABCD}-S_1}{S_1}=\dfrac{S_{ABCD}}{S_1}-1=\dfrac{8}{S_1}-1$，……………9 分

所以要使 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 最大，只需 S_1 最小.

设 $S_1=f(a)=a^3+2a+\dfrac{1}{a}, a\in[2-\sqrt{3},1]$，……………10 分

则 $f'(a)=3a^2+2-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3a^4+2a^2-1}{a^2}=\dfrac{(3a^2-1)(a^2+1)}{a^2}=\dfrac{(\sqrt{3}a-1)(\sqrt{3}a+1)(a^2+1)}{a^2}$，

令 $f'(a)=0$，得 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（舍），……………12 分

$a, f'(a), f(a)$ 的情况如下表：

a	$2-\sqrt{3}$	$\left(2-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		减	极小	增	

故当 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即入口 F 满足 $BF=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ km 时，该商业区的环境舒适度指数最大. …16 分

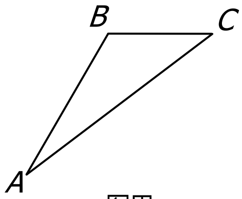
二、例题探究：

1. 解：（1）设缉私艇在C处与走私船相遇（如图甲），

依题意，$AC=3BC$. …… 2 分

在△ABC中，由正弦定理得，

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}\sin\angle ABC=\frac{\sin 120^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



图甲

因为$\sin 17^\circ\approx\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以$\angle BAC=17^\circ$.

从而缉私艇应向北偏东47°方向追击. …… 5 分

在△ABC中，由余弦定理得，

$\cos 120^\circ=\frac{4^2+BC^2-AC^2}{8BC}$，

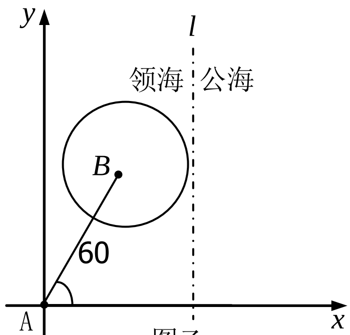
解得$BC=\frac{1+\sqrt{33}}{4}\approx 1.68615$.

又B到边界线l的距离为$3.8-4\sin 30^\circ=1.8$.

因为$1.68615<1.8$，所以能在领海上成功拦截走私船. …… 8 分

（2）如图乙，以A为原点，正北方向所在的直线为y轴建立平面直角坐标系xOy.

则$B\left(2，2\sqrt{3}\right)$，设缉私艇在$P(x，y)$处（缉私艇恰好截住走私船的位置）与走私船相遇，则$\frac{PA}{PB}=3$，即$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2}}=3$.



图乙

整理得，$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)^2=\frac{9}{4}$， …… 12 分

所以点$P(x，y)$的轨迹是以点$\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)$为圆心，$\frac{3}{2}$为半径的圆. 因为圆心$\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)$到领海边界线$l$：$x=3.8$的距离为1.55，大于圆半径$\frac{3}{2}$，

所以缉私艇能在领海内截住走私船. …… 14 分

答：（1）缉私艇应向北偏东47°方向追击；

（2）缉私艇总能在领海内成功拦截走私船. …… 16 分

2.【解】（1）由抛物线的定义知，$AF=AF\cdot\cos\alpha+2$，解得$AF=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

（2）据（1）同理可得$BF=\frac{2}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2}{1+\sin\alpha}$，

$CF=\frac{2}{1-\cos(\pi+\alpha)}=\frac{2}{1+\cos\alpha}$，$DF=\frac{2}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2}{1-\sin\alpha}$.

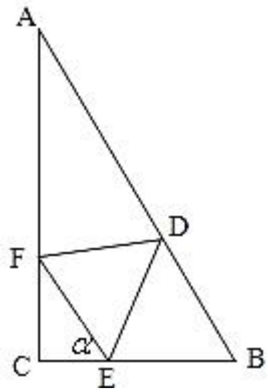
所以“蝴蝶形图案”的面积

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{2}{1-\sin\alpha}$，即$S=\frac{4(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $t=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$，则 $S=4\left(t^2-t\right),t\in\left[2,+\infty\right)$，所以当 $t=2$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，S 的最小值为 8.

答：当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，可使“蝴蝶形图案”的面积最小.

四、拓展延伸：



解：(1)$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AB=2$百米，$BC=1$百米.
$\therefore \cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，可得$B=60°$ $\because EF//AB$，$\therefore \angle CEF=\angle B=60°$，
设$\frac{CE}{CB}=\lambda\ (0<\lambda<1)$，则$CE=\lambda CB=\lambda$百米，
在$Rt\triangle CEF$中，$EF=2CE=2\lambda$百米，C 到 FE 的距离$d=\frac{\sqrt{3}}{2}CE=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$百米，
$\because C$到 AB 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$百米，
$\therefore$点 D 到 EF 的距离为$h=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)$百米，
可得$S\triangle DEF=\frac{1}{2}EF\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda(1-\lambda)$平方百米，
$\because \lambda(1-\lambda)\le\frac{1}{4}[\lambda+(1-\lambda)]^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$时等号成立.
$\therefore$当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，即 E 为 AB 中点时，$S\triangle DEF$的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{8}$平方百米.
(2)设正$\triangle DEF$的边长为 a，$\angle CEF=\alpha$则$CF=a\cdot\sin\alpha$，$AF=\sqrt{3}-a\cdot\sin\alpha$
设$\angle EDB=\angle 1$，可得$\angle 1=180°-\angle B-\angle DEB=120°-\angle DEB$，
$\alpha=180°-60°-\angle DEB=120°-\angle DEB$
$\therefore \angle ADF=180°-60°-\angle 1=120°-\alpha$在$\triangle ADF$中，$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-a\sin\alpha}{\sin(120^0-\alpha)}$，
化简得$a[2\sin(120°-\alpha)+\sin\alpha]=\sqrt{3}$，

$$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\alpha+\phi)}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

(其中φ是满足$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$的锐角)
$\therefore\triangle DEF$边长最小值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.