仪征中学2020届高三数学周三附加训练11卷　　2019.11.27

1、给定的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(1)求 A 的特征值 λ_1，λ_2；(2)求 A^4B.

2. 已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta+\sqrt{3} \\ y=2\sin\theta+1 \end{cases}$ （θ是参数），以平面直角坐标系的原点为极点，x 的正半轴为极轴建立极坐标系，求圆 C 的极坐标方程以及圆 C 关于极轴对称的圆 C' 的极坐标方程。

3、有编号为 1,2,3，…，n 的 n 个学生，入坐编号为 1,2,3，…，n 的 n 个座位，每个学生规定坐一个座位，设学生所坐的座位号与该生的编号不同的学生人数为 X，已知 $X=2$ 时，共有 6 种坐法．

(1)求 n 的值．(2)求随机变量 X 的概率分布列和 X 的数学期望．

4、在集合 $A=\{1,2,3,4,\cdots,2n\}$中，任取 $m(m\leqslant 2n，m，n\in N^*)$个元素构成集合 A_m.若 A_m 的所有元素之和为偶数，则称 A_m 为 A 的偶子集，其个数记为 $f(m)$；若 A_m 的所有元素之和为奇数，则称 A_m 为 A 的奇子集，其个数记为 $g(m)$．令 $F(m)=f(m)-g(m)$.

(1)当 $n=2$ 时，求 $F(1)$，$F(2)$，$F(3)$的值；(2)求 $F(m)$.

高三数学周三附加训练11卷　　2019.11.27

1、**解**：(1)所以 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$.

A 属于特征值2的特征向量 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$；$A$ 属于特征值3的特征向量 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

(2)由于 $B=\alpha_1+\alpha_2$，故 $A^4B=A^4(\alpha_1+\alpha_2)=2^4\alpha_1+3^4\alpha_2=16\alpha_1+81\alpha_2=\begin{bmatrix}32\\16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}81\\81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}113\\97\end{bmatrix}$.

2.圆C：$\rho=4\cos(\theta-\dfrac{\pi}{6})$，圆C’：$\rho=4\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})$

3、**解**：(1)因为当 $X=2$ 时，有 C_n^2 种坐法，所以 $C_n^2=6$，即 $\dfrac{n(n-1)}{2}=6$，

$n^2-n-12=0$，解得 $n=4$ 或 $n=-3$(舍去)，所以 $n=4$.

(2)因为学生所坐的座位号与该生的编号不同的学生人数为 X，

由题意知 X 的可能取值是0,2,3,4，

所以 $P(X=0)=\dfrac{1}{A_4^4}=\dfrac{1}{24}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2\times 1}{A_4^4}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3\times 2}{A_4^4}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$，

$P(X=4)=1-\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{8}$，E（X）=3

4、**解**：(1)当 $n=2$ 时，集合 $A=\{1,2,3,4\}$，当 $m=1$ 时，偶子集有{2}，{4}，

奇子集有{1}，{3}，$f(1)=2$，$g(1)=2$，$F(1)=0$；

当 $m=2$ 时，偶子集有{2,4}，{1,3}，奇子集有{1,2}，{1,4}，{2,3}，{3,4}，$f(2)=2$，$g(2)=4$，$F(2)=-2$；当 $m=3$ 时，偶子集有{1,2,3}，{1,3,4}，奇子集有{1,2,4}，{2,3,4}，$f(3)=2$，$g(3)=2$，$F(3)=0$.

(2)当 m 为奇数时，偶子集的个数 $f(m)=C_n^0C_n^m+C_n^2C_n^{m-2}+C_n^4C_n^{m-4}+\cdots+C_n^{m-1}C_n^1$，奇子集的个数 $g(m)=C_n^1C_n^{m-1}+C_n^3C_n^{m-3}+\cdots+C_n^mC_n^0$，所以 $f(m)=g(m)$，$F(m)=f(m)-g(m)=0$.

当 m 为偶数时，偶子集的个数 $f(m)=C_n^0C_n^m+C_n^2C_n^{m-2}+C_n^4C_n^{m-4}+\cdots-C_n^mC_n^0$，

奇子集的个数 $g(m)=C_n^1C_n^{m-1}+C_n^3C_n^{m-3}+\cdots+C_n^{m-1}C_n^1$，

所以 $F(m)=f(m)-g(m)=C_n^0C_n^m-C_n^1C_n^{m-1}+C_n^2C_n^{m-2}-C_n^3C_n^{m-3}+\cdots-C_n^{m-1}C_n^1+C_n^mC_n^0$.

一方面，$(1+x)^n(1-x)^n=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)\,[C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots+(-1)^nC_n^nx^n]$，

所以 $(1+x)^n(1-x)^n$ 中 x^m 的系数为 $C_n^0C_n^m-C_n^1C_n^{m-1}+C_n^2C_n^{m-2}-C_n^3C_n^{m-3}+\cdots-C_n^{m-1}C_n^1+C_n^mC_n^0$；另一方面，$(1+x)^n(1-x)^n=(1-x^2)^n$，$(1-x^2)^n$ 中 x^m 的系数为 $(-1)^{\frac{m}{2}}C_n^{\frac{m}{2}}$. 故 $F(m)=(-1)^{\frac{m}{2}}C_n^{\frac{m}{2}}$.综上，

$F(m)=\begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}C_n^{\frac{m}{2}}，m为偶数，\\ 0，m为奇数.\end{cases}$