江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 2

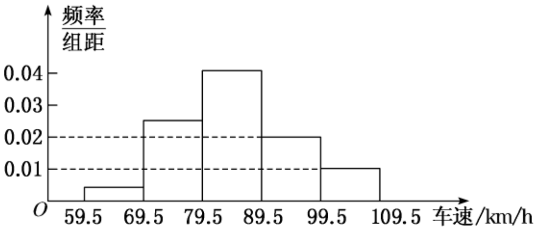
数学 I

一．填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．请把答案填写在答题卡相应位置．

1. 集合 $A=\left\{x|x^2-1>0\right\}, B=\left\{y|y=3^x,x\in R\right\}$，则 $A\cap B=$_______．

2. 若 $\dfrac{m+i}{1+i}=i$（i 为虚数单位），则实数 $m=$_______．

3. 某路段检测点对 200 辆汽车的车速进行检测，检测结果表示为频率分布直方图，如图所示，则车速不小于 90 km/h 的汽车约有________辆．



（第 3 题）

```
Read      a
S ← 0
I ← 1
While     I ≤ 3
          S ← S + a
          a ← 2 × a
          I ← I + 1
End       While
Print     S
```

（第 4 题）

4. 根据如图所示伪代码，当输入的 a 的值为 3 时，最后输出的 S 的值为__________．

5. 已知袋中装有大小相同、质地均匀的 2 个红球和 3 个白球，从中一次摸出 2 个，恰有 1 个是红球的概率为_______．

6. 不等式组 $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+3y\geq 4 \\ 3x+y\leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积等于_______．

7. 已知点 P 为平行四边形 ABCD 所在平面上任一点，且满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$，$\lambda\overrightarrow{PA}+\mu\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 $\lambda\mu=$__________．

8. 已知 $\boldsymbol{a}$ = (cos2α，sinα)， $\boldsymbol{b}$ =(1，2sinα—1)，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{2}{5}$，则 $tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$的值为_______．

9. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2\mathrm{e}^5$，则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}$ 的值为______．

10. 设 $m>0$，$n>0$，$2m+n=1$，则 $4m^2+n^2+\sqrt{mn}$ 的最大值与最小值之和为__________．

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$x^2+(y-3)^2=2$，点 A 是 x 轴上的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 长的取值范围为________．

12. 椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，P 为椭圆 M 上任一点，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值的取值范围是 $\left[2c^2,3c^2\right]$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则椭圆 M 的离心率 e 的取值范围是________.

13. 设 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\dfrac{\pi}{4}<B<\dfrac{\pi}{2}$，$a\cos B-b\cos A=\dfrac{1}{3}c$，则 $\tan^3 A\cdot\tan 2$ 的最大值为_______.

14. 设实数 $m>0$，若不等式 $me^{mx}-\ln x<0$ 恰好有三个整数解，则实数 m 的取值范围为_______.

二．解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或计算步骤．

15．（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1(x\in\mathbf{R})$.

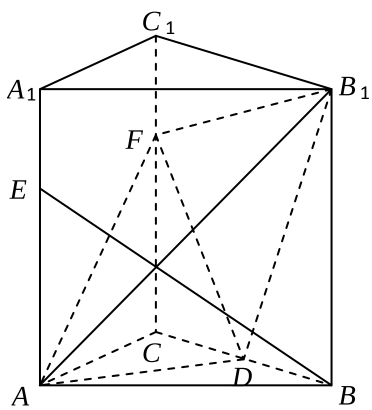
(1)求函数 $f(x)$的最小正周期及在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值；

(2)若 $f(x_0)=\dfrac{6}{5}$，$x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，求 $\cos 2x_0$ 的值．

16． (本小题满分 14 分) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1=3a$，$BC=2a$，D 是 BC 的中点，E，F 分别是 A_1A，C_1C 上一点，且 $AE=CF=2a$.

（1）求证：$B_1F\perp$ 平面 ADF；

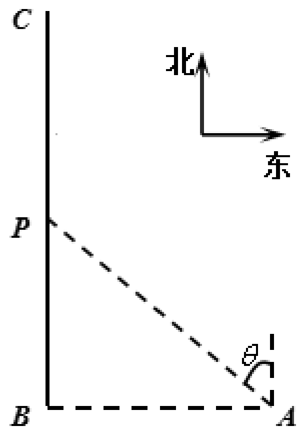
（2）求证：$BE\,//$ 平面 ADF.



17.（本小题满分 14 分）如图，B、C 分别是海岸线上的两个城市，两城市间有笔直的海滨公路连接，B、C 之间的距离为 $100km$，海岛 A 在城市 B 的正东方 $50km$。从海岛 A 到城市 C，先乘船按北偏西 θ 角（$\alpha<\theta\le\frac{\pi}{2}$，其中锐角 α 的正切值为 $\frac{1}{2}$）航行到海滨公路 P 处登陆，再换乘汽车到城市 C，已知船速为 $25km/h$，车速为 $75km/h$

（1）试建立由 A 经 P 到 C 所用时间与 θ 的函数解析式；

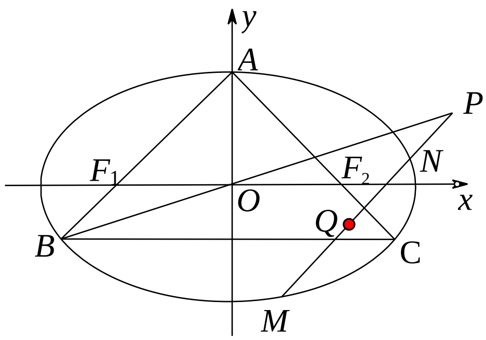
（2）试确定登陆点 P 的位置，使所用时间最少，并说明理由。



18.（本小题满分 16 分）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，它的上顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 AF_1，AF_2 分别交椭圆于点 B，C.

（1）求证直线 BO 平分线段 AC;

（2）设点 P（m，n）（m，n 为常数）在直线 BO 上且在椭圆外，过 P 的动直线 l 与椭圆交于两个不同点 M，N，在线段 MN 上取点 Q，满足 $\frac{MP}{PN}=\frac{MQ}{QN}$，试证明点 Q 恒在一定直线上.



19.（本小题满分 16 分）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}-a_n=p\cdot 3^{n-1}-nq$，$n\in\mathbf{N}^*, p,q\in\mathbf{R}$.

（1）若$q=0$，且数列$\{a_n\}$为等比数列，求p的值；

（2）若$p=1$，且a_4为数列$\{a_n\}$的最小项，求q的取值范围.

20.（本小题满分 16 分）已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$，且方程$f\left(x\right)-m=0$有两个相异实数根$x_1,x_2\left(x_1>x_2\right)$.

（1）求函数$f\left(x\right)$的单调递增区间；

（2）求实数m的取值范围；

（3）证明：$x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2>2$.

数学Ⅱ(附加题)

21．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ c & d \end{bmatrix}$，若矩阵 A 属于特征值 6 的一个特征向量为 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，属于特征值 1 的一个特征向量为 $\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

（1）求矩阵 A;

（2）写出矩阵 A 的逆矩阵.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

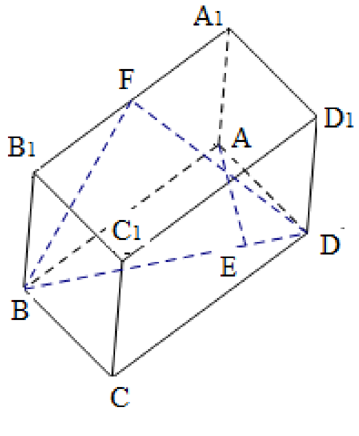
已知曲线 $C:\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)和曲线 $l:\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=3t \end{cases}$ (t 为参数)相交于两点 A,B，求 A,B 两点的距离.

23.（本小题满分 10 分）

如图，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，$AB=2,AA_1=1$，直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成角为 30°，AE 垂直 BD 于点 E，F 为 A_1B_1 的中点.

（1）求直线 AE 与平面 BDF 所成角的正弦值；

（2）线段 C_1D_1 上是否存在点 P , 使得二面角 $F-BD-P$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$？若存在，确定 P 点位置；若不存在，说明理由.



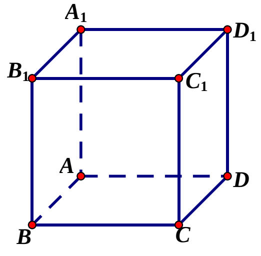
24.（本小题满分 10 分）

如图，一只蚂蚁从单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 出发，每一步（均为等可能性的）经过一条边到达另一顶点，设该蚂蚁经过 n 步回到点 A 的概率 p_n .

（1）分别写出 p_1,p_2 的值；

（2）设顶点 A 出发经过 n 步到达点 C 的概率为 q_n，求 p_n+3q_n 的值；

（3）求 p_n .



江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 2 参考答案

一．填空题：

1. $(1,+\infty)$ 2. -1 3. 60 4. 21 5. $3x-5y+14=0$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $-\frac{3}{4}$ 8. $\frac{1}{7}$ 9. 50

10. $\frac{25+4\sqrt{2}}{16}$ 11. $\left[\frac{2\sqrt{14}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$ 12. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 13. $\frac{1}{8}$ 14. $\left[\frac{\ln 5}{5},\frac{\ln 2}{2}\right)$

二．解答题：

15．解：(1)由 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$，得 $f(x)=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2x-1)=\sqrt{3}$

$\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以函数 $f(x)$的最小正周期为 π.

因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上为增函数，

在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上为减函数，又 $f(0)=1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，

所以函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为 2，最小值为$-1$.

(2)由(1)可知 $f(x_0)=2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$. 又因为 $f(x_0)=\frac{6}{5}$，所以 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.由 $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，

得 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$从而 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$.

所以 $\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

16. （1）证明：$\because AB=AC$，D 为 BC 中点，$\therefore AD\perp BC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\because B_1B\perp$底面 ABC，$AD\subset$底面 ABC，$\therefore AD\perp B_1B$.

$\because BC\cap B_1B=B$，$\therefore AD\perp$平面 B_1BCC_1.

$\because B_1F\subset$平面 B_1BCC_1，$\therefore AD\perp B_1F$.

在矩形 B_1BCC_1 中，$\because C_1F=CD=a$，$B_1C_1=CF=2a$，

$\therefore Rt\triangle DCF\cong Rt\triangle FC_1B_1$.

$\therefore \angle CFD=\angle C_1B_1F$. $\therefore \angle B_1FD=90°$. $\therefore B_1F\perp FD$.

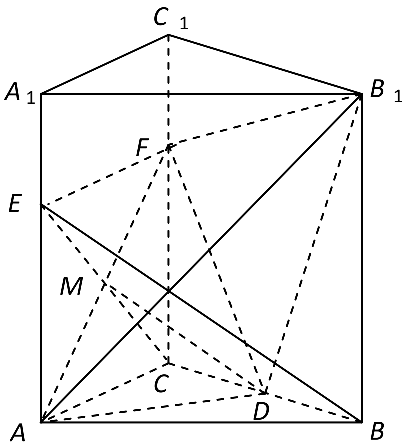
$\because AD\cap FD=D$，$\therefore B_1F\perp$平面 AFD.

（2）连 EF，EC，设 $EC\cap AF=M$，连 DM，

$\because AE=CF=2a$，$\therefore$四边形 $AEFC$ 为矩形，$\therefore M$ 为 EC 中点.

$\because D$ 为 BC 中点，$\therefore MD // BE$.

$\because MD\subset$平面 ADF，. $BE\not\subset$平面 ADF，$\therefore BE //$平面 ADF



17. （1）由题意，轮船航行的方位角为θ，所以$\angle BAP=90^\circ-\theta$，$AB=50$

则 $AP=\dfrac{50}{\cos(90^\circ-\theta)}=\dfrac{50}{\sin\theta}$， $BP=50\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}$，

$PC=100-BP=100-\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}$，由 A 到 P 所用时间为 $t_1=\dfrac{AP}{25}=\dfrac{2}{\sin\theta}$，

由 P 到 C 所用时间为 $t_2=\dfrac{100-\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}}{75}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}$

所以由 A 经 P 到 C 所用时间与 θ 的函数关系为

$f(\theta)=t_1+t_2=\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}=\dfrac{6-2\cos\theta}{3\sin\theta}+\dfrac{4}{3}$， $\theta\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$。

（2）由（1）得 $f'(\theta)=\dfrac{4(1-3\cos\theta)}{9\sin^2\theta}$，令 $f'(\theta)=0$ 得 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.设 $\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

使 $\cos\theta_0=\dfrac{1}{3}$。

θ	(α,θ_0)	θ_0	$\left(\theta_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

所以，当 $\theta=\theta_0$ 时，函数 $f(\theta)$ 取得最小值，此时 $BP=\dfrac{50\cos\theta_0}{\sin\theta_0}=\dfrac{25\sqrt{2}}{2}(km)$。

答：在 BC 上选择距离 B 为 $\dfrac{25\sqrt{2}}{2}km$ 处为登陆点，所用时间最少。

18. **解**：（1）由题意，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $a=\sqrt{3}c$，$b^2=a^2-c^2=2c^2$，故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3c^2}+\dfrac{y^2}{2c^2}=1$，

即 $2x^2+3y^2-6c^2=0$，其中 $A(0,\sqrt{2}c)$， $F_1(-c,0)$，

∴直线 AF_1 的斜率为 $\sqrt{2}$，此时直线 AF_1 的方程为 $y=\sqrt{2}(x+c)$，

联立 $\begin{cases}2x^2+3y^2-6c^2=0,\\ y=\sqrt{2}(x+c),\end{cases}$ 得 $2x^2+3cx=0$，解得 $x_1=0$（舍）和 $x_2=-\dfrac{3}{2}c$，

即 $B(-\dfrac{3}{2}c,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}c)$，由对称性知 $C(\dfrac{3}{2}c,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}c)$.

直线 BO 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{3}x$，线段 AC 的中点坐标为 $(\frac{3c}{4},\frac{\sqrt{2}c}{4})$，

AC 的中点坐标 $(\frac{3c}{4},\frac{\sqrt{2}c}{4})$ 满足直线 BO 的方程，即直线 BO 平分线段 AC.

（2）设过 P 的直线 l 与椭圆交于两个不同点的坐标为 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，点 $Q(x,y)$，

则 $2x_1^2+3y_1^2=6c^2$，$2x_2^2+3y_2^2=6c^2$.

$\because \frac{MP}{PN}=\frac{MQ}{QN}$，$\therefore$ 设 $\frac{MP}{PN}=\frac{MQ}{QN}=\lambda$，则 $\overrightarrow{MP}=-\lambda\overrightarrow{PN},\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{QN}$，

求得 $m=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$n=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，

$\therefore mx=\frac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2},ny=\frac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}$，

$\therefore 2mx+3ny=\frac{2x_1^2-2\lambda^2x_2^2+3y_1^2-3\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=\frac{2x_1^2+3y_1^2-\lambda^2(2x_2^2+3y_2^2)}{1-\lambda^2}=6c^2$，

由于 m，n，C 为常数，所以点 Q 恒在直线 $2mx+3ny-6c^2=0$ 上.

19. 解：（1）$q=0$，$a_{n+1}-a_n=p\cdot 3^{n-1}$，$\therefore a_2=a_1+p=\frac{1}{2}+p$，$a_3=a_2+3p=\frac{1}{2}+4p$，

由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，得 $\left(\frac{1}{2}+p\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+4p\right)$，解得 $p=0$ 或 $p=1$.

当 $p=0$ 时，$a_{n+1}=a_n$，$\therefore a_n=\frac{1}{2}$ 符合题意；

当 $p=1$ 时，$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$，

$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=\frac{1}{2}+(1+3+\cdots+3^{n-2})=\frac{1}{2}+\frac{1-3^{n-1}}{1-3}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$，

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3$ 符合题意.

（2）法一：若 $p=1$，$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}-nq$，$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=\frac{1}{2}+(1+3+\cdots+3^{n-2})-[1+2+\cdots+(n-1)]q=\frac{1}{2}[3^{n-1}-n(n-1)q]$. ……8 分

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 a_4，

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{1}{2}[3^{n-1}-n(n-1)q]\geqslant a_4=\frac{1}{2}(27-12q)$ 恒成立，

即 $3^{n-1}-27\geqslant(n^2-n-12)q$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

当 $n=1$ 时，有 $-26\geqslant-12q$，$\therefore q\geqslant\frac{13}{6}$；

当 $n=2$ 时，有 $-24\geqslant-10q$，$\therefore q\geqslant\frac{12}{5}$；

当 $n=3$ 时，有 $-18\geqslant-6q$，$\therefore q\geqslant 3$；

当 $n=4$ 时，有 $0\geqslant 0$，$\therefore q\in\mathbf{R}$；…12 分

当 $n\geqslant 5$ 时，$n^2-n-12>0$，所以有 $q\leqslant\frac{3^{n-1}-27}{n^2-n-12}$ 恒成立，

令 $c_n=\dfrac{3^{n-1}-27}{n^2-n-12}\left(n\geqslant 5,n\in\mathbf{N}^*\right)$，

则 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{2\left(n^2-2n-12\right)3^{n-1}+54n}{\left(n^2-16\right)\left(n^2-9\right)}>0$，即数列 $\{c_n\}$ 为递增数列，$\therefore q\leqslant c_5=\dfrac{27}{4}$.

综上所述，$3\leqslant q\leqslant\dfrac{27}{4}$.

法二：因为 $p=1$，$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}-nq$，

又 a_4 为数列 $\{a_n\}$ 的最小项，所以 $\begin{cases}a_4-a_3\leqslant 0,\\ a_5-a_4\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}9-3q\leqslant 0,\\ 27-4q\geqslant 0,\end{cases}$

所以 $3\leqslant q\leqslant\dfrac{27}{4}$. 此时 $a_2-a_1=1-q<0$，$a_3-a_2=3-2q<0$，所以 $a_1>a_2>a_3\geqslant a_4$.

当 $n\geqslant 4$ 时，令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，$b_{n+1}-b_n=2\cdot 3^{n-1}-q\geqslant 2\cdot 3^{4-1}-\dfrac{27}{4}>0$，所以 $b_{n+1}>b_n$，

所以 $0\leqslant b_4<b_5<b_6<\cdots$，即 $a_4\leqslant a_5<a_6<a_7<\cdots$.

综上所述，当 $3\leqslant q\leqslant\dfrac{27}{4}$ 时，a_4 为数列 $\{a_n\}$ 的最小项，即所求 q 的取值范围为 $[3,\dfrac{27}{4}]$.

20. （1）因为 $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}\ (x>0)$，$f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$；

当 $f'(x)>0$ 时，$0<x<1$，所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,1)$；

（2）

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

则 $f(x)_{max}=f(1)=1$.

① $m>1$，$f(x)=m$ 无解；

② $m=1$，$f(x)=m$ 有一解；

③ $m\leqslant 0$，$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>0$，$f(x)=m$ 无解，$x\in(0，1)$时，$f(x)$是增函数，$f(x)=m$ 至多有一解．所以 $x\in(0，+\infty)$时，$f(x)=m$ 至多有一解；

④ $0<m<1$ 时，

1）$x\in(0，1)$时，$f(x)$是增函数，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$，$f(1)=1$，$f(x)$图象不间断，

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)<m<f(1)$，所以 $f(x)=m$ 在 $(\dfrac{1}{\sqrt{e}},1)$ 内有一解，即在 $(0,1)$ 内有一解；

2）$x\in(1，+\infty)$时，$f(x)$是减函数，先证：$\ln x\leqslant\dfrac{1}{e}x$.

令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{\mathrm{e}}x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$．

x	$(0,\ \mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

则 $g(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=0$．所以 $\ln x\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}x$．

则在 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}\leqslant\frac{1+\frac{2}{\mathrm{e}}x}{x^2}<\frac{1+x}{x^2}<\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$，

令 $\frac{2}{x}=m$，即 $x=\frac{2}{m}$，则 $f(\frac{2}{m})<m$．又 $m<f(1)$，$f(x)$在（1，$+\infty$）内是减函数，

所以 $f(x)=m$ 在 $(1,\frac{2}{m})$ 内有一解，即在 $(1,+\infty)$ 内有一解．

综上所述，当且仅当 $0<m<1$ 时，$f(x)=m$ 在（0，$+\infty$）内有两解．

实数 m 的取值范围是（0，1）．

（3）由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $\frac{1+2\ln x_1}{x_1^2}=\frac{1+2\ln x_2}{x_2^2}$．

令 $x_1=x_2t$，因为 $x_1>x_2$，所以 $t>1$．$\frac{1+2\ln t+2\ln x_2}{t^2}=1+2\ln x_2$．

则 $\ln x_2=\frac{1}{t^2-1}\ln t-\frac{1}{2}$．

下证 $x_1x_2>1$：

因为 $\ln x_1+\ln x_2=2\ln x_2+\ln t=\frac{t^2+1}{t^2-1}\ln t-1$．

所以只要证 $\frac{t^2+1}{t^2-1}\ln t-1>0$，即证 $\ln t-\frac{t^2-1}{t^2+1}>0$（*）．

令 $g(t)=\ln t-\frac{t^2-1}{t^2+1}$，因为 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}=\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}>0$

所以 $g(t)$ 在（1，$+\infty$）上是增函数，$g(t)$ 在（0，$+\infty$）上图象不间断，

则 $g(t)>g(1)=0$．

（*）式成立，所以 $x_1x_2>1$：

由基本不等式，得 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}>2$．

所以 $x_1^2x_2+x_1x_2^2>2$．

注：也可直接证明 $x_1+x_2>2$：

因为 $x_1+x_2=x_2(t+1)$，所以只要证 $x_2>\frac{2}{t+1}$，即证 $\ln x_2>\ln\frac{2}{t+1}$，

即证 $\frac{1}{t^2-1}\ln t-\frac{1}{2}>\ln\frac{2}{t+1}$．即证 $\ln t-\frac{1}{2}(t^2-1)+(t^2-1)\ln\frac{t+1}{2}>0$．

令 $h(t)=\ln t-\frac{1}{2}(t^2-1)+(t^2-1)\ln\frac{t+1}{2}$，

因为 $h'(t)=\frac{1}{t}-t+2t\ln\frac{t+1}{2}+(t^2-1)\frac{1}{t+1}=2t\ln\frac{t+1}{2}+\frac{1}{t}-1$，

令 $u(t)=2\ln\frac{t+1}{2}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}$，

因为 $u'(t)=\frac{2}{t+1}-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^2}=(t-1)\frac{2t^2+3t+2}{t^3(t+1)}>0$，

所以$u(t)$在（1，+∞）上是增函数，$u(t)>u(1)=0$.

则$h'(t)>0$，$h(t)$在（1，+∞）上是增函数，$h(t)>h(1)=0$.

∴$x_1+x_2>2$成立.

由①，②，得 $x_1^2x_2+x_1x_2^2>2$.

2019 届高三下学期数学周末限时训练 2 参考答案（附加题）

21．解：（1）由矩阵 A 属于特征值 6 的一个特征向量为$\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$可得，$\begin{bmatrix}3&3\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

即 c＋d＝6，

由矩阵 A 属于特征值 1 的一个特征向量为$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$，

可得$\begin{bmatrix}3&3\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$，即 3c－2d＝－2，解得$\begin{cases}c=2,\\d=4.\end{cases}$ 即 A＝$\begin{bmatrix}3&3\\2&4\end{bmatrix}$．……7 分

（2）A 的逆矩阵是$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$． ……………………10 分

22．解：曲线C的普通方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………2 分

曲线l的普通方程为$y=-\frac{3}{2}x+3$，……………4 分

两方程联立得 $x^2-3x+2=0$ $x_1=2,x_2=1$，…………8 分

$A(2,0),B(1,\frac{3}{2})$ $AB=\frac{\sqrt{13}}{2}$. ……………10 分

23．解：由 $AD\perp$面AA_1B_1B， 得 BD与面AA_1B_1B所成角为$\angle DBA=30^0$，

$AB=2,\therefore AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,由 $AE\perp BD\Rightarrow AE=1$

（1）以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\}$为正交基底建立平面直角坐标系，则

$A(0,0,0),\mathrm{B}(2,0,0),\mathrm{F}(1,0,1),\mathrm{D}(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0),E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，设面$BDF$的一个

法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,\frac{2\sqrt{3}}{3},0),\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$,

$$\begin{cases}-2x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y=0\\-x+z=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$$ ……………3 分

$$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{AE},\vec{n}\right\rangle=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

答：AE 与面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………5 分

（2）令 $\overrightarrow{C_1P}=\lambda\overrightarrow{C_1D_1},\lambda\in[0,1]$，则 $P(2-2\lambda,\frac{2\sqrt{3}}{3},1)$

设设面 BDP 的一个法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BP}=(-2\lambda,\frac{2\sqrt{3}}{3},1)$

$$\begin{cases}-2x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y=0\\-2\lambda x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y+z=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n_1}=(1,\sqrt{3},2\lambda-2)$$ ……………7 分

$$\therefore \cos\left\langle \vec{n},\vec{n_1}\right\rangle=\frac{1+3+2\lambda-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4+(2\lambda-2)^2}}=\frac{\lambda+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(\lambda-1)^2}}=\frac{3}{5}$$

化简得 $4\lambda^2-28\lambda+13=0\Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=\frac{13}{2}$ ……………9 分

$\because 0<\lambda<1 \therefore \lambda=\frac{1}{2}$

答：存在点 P，为 C_1D_1 的中点. ……………10 分

24．解：（1）$p_1=0$， ……………1 分

$p_2=3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ……… 2 分

（2）由于顶点 A 出发经过 n 步到达点 C 的概率为 q_n，则由 A 出发经过 n 步到达点 B_1,D_1 的概率也是 q_n

并且由 A 出发经过 n 步不可能到 A_1,B,D,C_1 这四个点，所以 n 为奇数时，$p_n=q_n=0$，所以 $p_n+3q_n=0$……………3 分

n 为偶数时，$p_n+3q_n=1$……………4 分

（3）同理，由 C,B_1,D_1 分别经 2 步到点 A 的概率都是 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

由 A 出发经过 n 步再回到 A 的路径分为以下四类：

①由 A 经历 $n-2$ 步到 A，再经 2 步回到 A，概率为 $\frac{1}{3}p_{n-2}$；

②由 A 经历 $n-2$ 步到 C，再经 2 步回到 A，概率为 $\frac{2}{9}q_{n-2}$；

③由 A 经历 $n-2$ 步到 B_1，再经 2 步回到 A，概率为 $\frac{2}{9}q_{n-2}$；

④由 A 经历 $n-2$ 步到 D_1，再经 2 步回到 A，概率为 $\frac{2}{9}q_{n-2}$；

所以 $p_n=\frac{1}{3}p_{n-2}+\frac{2}{3}q_{n-2}$，结合 $p_n+3q_n=1$ ……………7 分

消元得：$p_n=\frac{1}{3}p_{n-2}+\frac{2}{3}\bullet\frac{1-p_{n-2}}{3}=\frac{1}{9}p_{n-2}+\frac{2}{9}$，即 $p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_{n-2}-\frac{1}{4}\right)$，

所以 $p_n-\frac{1}{4}=\left(p_2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{4}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，故 $p_n=\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

综上所述，$p_n=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right), n\text{为偶数}\\ 0\qquad\qquad\qquad , n\text{为奇数}\end{cases}$ ……………10 分