

## 江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科期中复习

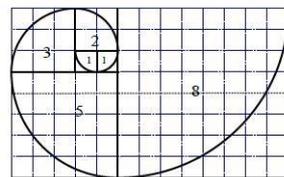
## 期中综合小练 (3)

班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 日期: \_\_\_\_\_

## 一、单选题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

1. 已知集合  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{\frac{x-4}{x-7}} \right\}$ , 集合  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
- A.  $(3, 4)$                       B.  $\{3, 4\}$                       C.  $[3, 4]$                       D.  $\{3, 4, 7\}$
2. “ $2x^2 - 5x - 3 < 0$ ”的一个必要不充分条件是 ( )
- A.  $-\frac{1}{2} < x < 3$                       B.  $-3 < x < \frac{1}{2}$                       C.  $-1 < x < 6$                       D.  $-\frac{1}{2} < x < 0$
3. 若函数  $f(x) = \sin(4x - \varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ) 在区间  $(0, \frac{\pi}{6})$  上单调递增, 则实数  $\varphi$  的取值范围是 ( )
- A.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$                       B.  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$                       C.  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$                       D.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
4.  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin 2\alpha =$  ( )
- A.  $-\frac{4}{5}$                       B.  $\frac{4}{5}$                       C.  $-\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{3}{5}$

5. 斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”, 它的画法是: 以斐波那契数: 1, 1, 2, 3, 5, ... 为边的正方形拼成长方形, 然后在每个正方形中画一个圆心角为  $90^\circ$  的圆弧, 这些圆弧所连起来的弧线就是斐波那契螺旋线. 自然界存在很多斐波拉契螺旋线的图案, 例如向日葵、鹦鹉螺等. 下图为该螺旋线的前一部分, 如果用接下来的一段圆弧所对应的扇形做圆锥的侧面, 则该圆锥的底面半径为



- A.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$                       B.  $\frac{13}{8}$
- C.  $\frac{13}{4}$                       D.  $\frac{13}{2}$

6. 已知函数  $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ , 若方程  $f(x) = a$  有 3 个不同的实根  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ), 则  $\frac{a}{x_2 - 2}$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[-\frac{1}{e}, 0\right)$                       B.  $\left[-\frac{1}{e}, \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$                       C.  $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, 0)$                       D.  $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$

二、多选题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分.全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.）

7. 已知集合  $A = \{y | y = x, x \in \mathbf{R}\}$ ，集合  $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A.  $(0, 0) \in B$                       B.  $A \cap B = \{0, 1\}$                       C.  $B = [0, +\infty)$                       D.  $B \subseteq A$

8. 下列命题中正确的是

- A.  $\exists x \in (0, +\infty), (\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{3})^x$                       B.  $\forall x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$   
C.  $\forall x \in (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2})^x > x^{\frac{1}{2}}$                       D.  $\exists x \in (0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2})^x > \log_{\frac{1}{3}} x$

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

9. 设随机变量  $X \sim B(n, \frac{1}{4})$ ， $Y = 2X + 1$ ，若  $E(Y) = 4$ ，则  $n =$ \_\_\_\_\_.

10. 武汉某学校的四名党员教师积极参加党员干部下沉社区的活动，在活动中他们会被随机分配到 A、B、C 三个社区. 若每个社区至少分配一名党员教师，且教师甲必须分配到 A 社区，共有\_\_\_\_\_种不同的分配方案.

11. 我国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“三斜求积术”，即以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积. 把以上文字写成公式，即  $S = \sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ （其中  $S$  为三角形的面积， $a, b, c$  为三角形的三边）. 在非直角  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  为内角  $A, B, C$  所对应的三边，若  $a = 3$ ，且  $a = c(\cos B + \sqrt{3}\cos C)$ ，则  $\triangle ABC$  的面积最大时， $c =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题（本题共3小题，计34分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

12. (10分) 在条件① $(a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$ , ② $a\sin B = b\cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$ ,

③ $b\sin\frac{B+C}{2} = a\sin B$ 中任选一个, 补充到下面问题中, 并给出问题解答.

在 $\triangle ABC$ 中, 角A, B, C的对边分别为 $a, b, c$ ,  $b+c=6$ ,  $a=2\sqrt{6}$ , \_\_\_\_\_, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

13. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ .

(1) 若 $a=1$ , 证明: 当 $x \geq 0$ 时,  $f(x) \geq 1$ ;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 $a$ .

14. (12分) 某医院为筛查某种疾病, 需要检验血液是否为阳性, 现有  $n(n \in \mathbb{N}^*)$  份血液样本, 有以下两种检验方式: (1) 逐份检验, 则需要检验  $n$  次; (2) 混合检验, 将其中  $k(k \in \mathbb{N}^*$  且  $k \geq 2)$  份血液样本分别取样混合在一起检验. 若检验结果为阴性, 这  $k$  份血液全为阴性, 因而这  $k$  份血液样本只要检验一次就够了, 如果检验结果为阳性, 为了明确这  $k$  份血液究竟哪几份为阳性, 就要对这  $k$  份再逐份检验, 此时这  $k$  份血液的检验次数总共为  $k+1$  次. 假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的, 且每份样本是阳性结果的概率为  $p(0 < p < 1)$ .

(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份样本为阳性, 若采用逐份检验方式, 求恰好经过 4 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率;

(2) 现取其中  $k(k \in \mathbb{N}^*$  且  $k \geq 2)$  份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为  $\xi_1$ , 采用混合检验方式, 样本需要检验的总次数为  $\xi_2$ .

① 试运用概率统计的知识, 若  $E\xi_1 = E\xi_2$ , 试求  $p$  关于  $k$  的函数关系式  $p = f(k)$ ;

② 若  $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ , 采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少, 求  $k$  的最大值.

参考数据:  $\ln 2 \approx 0.693 1$ ,  $\ln 3 \approx 1.098 6$ ,  $\ln 4 \approx 1.386 3$ ,  $\ln 5 \approx 1.609 4$ ,  $\ln 6 \approx 1.791 8$ .