C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【一题多变详解】

1.答案:B

因为 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b$,而 $2^{2b}+\log_2 b<2^{2b}+\log_2 b+1=2^{2b}+\log_2 2b$,所以 $2^a+\log_2 a<2^{2b}+\log_2 2b$.令 $f(x)=2^x+\log_2 x$,由指数函数、对数函数的单调性,可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $f(a)<f(2b)$,所以 $a<2b$.故选 B.

2.答案:A

由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$,得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$.令 $f(x)=2^x-3^{-x}$,由指数函数的单调性可知,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $f(x)<f(y)$,所以 $x<y$,即 $y-x>0$.因为 $y-x+1>1$,所以 $\ln(y-x+1)>\ln 1=0$.故选 A.

3. 答案:A

易知 $a,b,c\in(0,1)$.由

$$\frac{a}{b}=\frac{\log_5 3}{\log_8 5}=\log_5 3\times\log_5 8<$$

$$\frac{(\log_5 3+\log_5 8)^2}{4}=\frac{(\log_5 24)^2}{4}<\frac{2^2}{4}=1,$$

得 $a<b$.因为 $b=\log_8 5$,$c=\log_{13}8$,所以 $8^b=5$,$13^c=8$,即 $8^{5b}=5^5$,$13^{4c}=8^4$.又因为 $5^5<8^4$,$13^4<8^5$,所以 $13^{4c}=8^4>5^5=8^{5b}>13^{4b}$,即 $b<c$.

综上,$a<b<c$.故选 A.

4. 答案:D

因为 $a=3^{0.7}$,$b=(\frac{1}{3})^{-0.8}=3^{0.8}$,所以 $b>a>1$.又因为 $0<c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$,所以 $b>a>c$.故选 D.

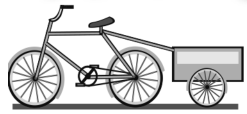
5. 答案:A

因为 $\log_2\sqrt{8}<\log_2 3<\log_2 4$,所以 $\frac{3}{2}<\log_2 3<2$,所以 $\frac{1}{2}<\log_3 2<\frac{2}{3}$,故 $a<c$.又因为 $c=\frac{2}{3}\log_5 5=\log_5\sqrt[3]{25}$,$b=\log_5 3=\log_5\sqrt[3]{27}$,所以 $c<b$.

综上,$a<c<b$.故选 A.

(作者单位:陕西省汉中市四〇五学校)

分段数列的通项与求和



◇ 江苏　陈　敏[1]　张启兆[2]

分段数列是一种特殊的分段函数,已成为近几年高考和各类竞赛中的“新亮点”.在 2021 年新高考数学Ⅰ卷中就出现了一道关于分段数列的题,本文从分段数列的特点出发,归纳分段数列的考查类型及常用解题策略,希望对读者有所帮助.

1　分段数列的特点

1) 通项公式分段,如(苏教版高中数学《必修 5》2012 年 6 月第 4 版第 34 页)写出数列$\{a_n\}$的前 5 项,并作出它的图象,$a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

2) 递推关系分段,如 2021 年新高考Ⅰ卷的第 17 题.

2　分段数列类型

2.1　由奇偶分类引起的分段

策略 1　活用递推,等价转化

例 1　(2021 年新高考Ⅰ卷 17)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)记 $b_n=a_{2n}$,写出 b_1,b_2,并求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求$\{a_n\}$的前 20 项和.

分析　(1)所给条件中的数列是一个分段数列,初看这个数列的定义有点“吓人”,再看所求目标写出 b_1,b_2 的值,挺开心的,因为一方面是送分,另一方面提示求 b_3,从而直观感觉数列$\{b_n\}$是等差数列,再进一步进行理性判断$\{b_n\}$,进而联想到利用定义证明$\{b_n\}$是等差数列.

(2)顺着题意做,不妨设 $b_n=a_{2n}$,当 n 为奇数时 $a_{n+1}=a_n+1$,即 $a_n=a_{n+1}-1$,把$\{a_n\}$的奇数项转化为$\{a_n\}$的偶数项,从而转化为求数列$\{b_n\}$的前 10 项和的问题.

解　(1)由 $a_1=1$,得 $a_2=a_1+1=2$,$a_3=a_2+2=4$,$a_4=a_3+1=5$,$a_5=a_4+2=7$,$a_6=a_5+1=8$,从而 $b_1=a_2=2$,$b_2=a_4=5$,$b_3=a_6=8$.$b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=a_{2n+1}+1-a_{2n}=a_{2n}+2+1-a_{2n}=3$,所

以数列$\{b_n\}$是以2为首项,3为公差的等差数列,从而$b_n=2+3(n-1)=3n-1$,即数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3n-1$.

(2)设$\{a_n\}$的前20项和为S_{20},当n为奇数时,$a_{n+1}=a_n+1$,即$a_n=a_{n+1}-1$.不妨设$b_n=a_{2n}$,则

$$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})=[(a_2-1)+(a_4-1)+(a_6-1)+\cdots(a_{20}-1)]+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})=2(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})-10=2(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})-10=2\times(2\times10+\frac{10\times9}{2}\times3)-10=300.$$

点评 1)数列的概念是求解数列问题的基础,灵活运用数列的概念,往往简洁明了,出奇制胜.在充分理解新定义数列的基础上,根据定义规则进行赋值验算,找出隐含的递推关系,这是破解本题的核心步骤.

2)数列的基本思想是递推思想.对于一个"陌生"的数列,常常多写式子、多写项,然后直观感知、发现思路.

3)利用定义法证明一个数列是等差数列,是高考考查的重点.

4)第(1)问为第(2)问做铺垫,利用等价转化,把$\{a_n\}$的奇数项转化为$\{a_n\}$的偶数项,可以轻松解决第(2)问.当然,第(2)问也可利用累加法,或考查$\{a_n\}$的奇数项情形.

策略2 分类讨论,并项求和

例2 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1$,$a_{n+1}+(-1)^n a_n=11-2n$,记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

(1)求S_{101}的值;

(2)求S_n的最大值.

分析 (1)当$n=2k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时,$a_{2k+1}+a_{2k}=11-4k$,从而求得$a_2+a_3=11-4\times1$,$a_4+a_5=11-4\times2$,$\cdots$,$a_{100}+a_{101}=11-4\times50$,按照等差数列的求和公式求解即可.

(2)当$n=2k-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时,$a_{2k}-a_{2k-1}=13-4k$,与(1)中为偶数时的式子作差,从而求得$a_{2k-1}=-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$,$a_{2k}=12-4k$.由于奇数项为常数项,偶数项单减,故只需对n进行讨论,找到最大的S_n即可.

解 (1)由$a_{n+1}+(-1)^n\cdot a_n=11-2n$,得当$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时,有

$$a_{2k+1}+a_{2k}=11-4k, \quad ①$$

所以$a_2+a_3=11-4\times1$,$a_4+a_5=11-4\times2$,$\cdots$,$a_{100}+a_{101}=11-4\times50$,因此$S_{101}=a_1+11\times50-4\times\frac{(1+50)\times50}{2}=-4\ 551$.

(2)当$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时,有

$$a_{2k}-a_{2k-1}=13-4k, \quad ②$$

①-②得$a_{2k+1}+a_{2k-1}=-2$,又$a_1=-1$,于是$a_{2k-1}=-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$,$a_{2k}=12-4k$,可得$a_2=8$,$a_4=4$,$a_6=0$.当$k>3$ $(k\in\mathbf{N}^*)$时,$a_{2k}<0$.

又$k\in\mathbf{N}^*$,$a_{2k-1}=-1<0$,所以当$n>6$ $(n\in\mathbf{N}^*)$时,$a_n<0$.又$S_1=-1$,$S_2=7$,$S_3=6$,$S_4=10$,$S_5=S_6=9$,当$n>6$ $(n\in\mathbf{N}^*)$时,$S_n>S_{n+1}$.因此当$n=4$时,S_n取得最大值,且$S_4=10$.

点评 在递推关系中a_n前面的系数出现型如$(-1)^n$的形式时,需要对n分奇偶分别写出递推关系,从而求得通项公式或前n项和公式,再借助单调性求得最值.

策略3 分类讨论,探求规律

例3 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1$,$a_4=2a_2+a_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n;

(2)若$b_n=a_n^2\cos\frac{n\pi}{2}$,求数列$\{b_n\}$的前40项和$S_{40}$.

分析 (1)根据题设条件求出等差数列$\{a_n\}$的公差即可.

(2)需要对n分奇偶讨论,然后求出数列$\{b_n\}$的通项公式,再用分组并项求和的方法即可获解.

解 (1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由已知可得$a_1+3d=3a_1+4d$,得$d=2$,所以$a_n=2n-3$.

(2)因$b_n=a_n^2\cos\frac{n\pi}{2}$,所以当$n$为奇数时,$b_n=0$;当$n$为偶数时,若$n=4k+2$,$k\in\mathbf{N}$,则$b_n=-a_n^2$;若$n=4k+4$,$k\in\mathbf{N}$,则$b_n=a_n^2$,所以

$$S_{40}=(a_4^2-a_2^2)+(a_8^2-a_6^2)+(a_{12}^2-a_{10}^2)+\cdots+(a_{36}^2-a_{34}^2)+(a_{40}^2-a_{38}^2)=2d(a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{40})=4(20a_2+\frac{20\times19}{2}\times2d)=3\ 120.$$

点评 若数列$\{a_n\}$中含有$\sin n\pi$,$\cos n\pi$,$\sin\frac{n\pi}{2}$,$\cos\frac{n\pi}{2}$,$\cdots$则需对n进行奇偶性讨论,通过研究奇数项与偶数项的特征,求得通项公式.求解本题的关键是当n为偶数时,还要进行二次分类,分$n=4k+2$,$k\in\mathbf{N}$和$n=4k+4$,$k\in\mathbf{N}$.

2.2　由通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$ 引起的分段

策略　分类讨论,注意检验

例 4　(2021 年全国乙卷理 19)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

(1)证明:数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析　(1)先仔细审题,厘清条件,然后从目标出发,要证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,通法是什么?(定义法)递推关系式 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 中的 S_n 能否转化为 b_n.

(2)顺着题意做,由(1)可求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式,代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 即可得到 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$,然后利用通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系即可解决问题.

证明　(1)因为 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,所以 $S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(n\geqslant 2)$,而 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,所以 $\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2$,所以 $2b_{n-1}+1=2b_n$,所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$.又因为当 $n=1$ 时,$\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=2$,所以 $b_1=\frac{3}{2}$,数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(2)由(1)可知 $b_n=\frac{n+2}{2}$,代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,得

$$S_n=\frac{n+2}{n+1}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}.$$

当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{3}{2}$,故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2}, & n=1,\\ -\frac{1}{n(n+1)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

点评　1)将已知关系式中的 S_n 换成 $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ 是解题的关键,体现了化归思想.

2)在利用通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系求通项公式 a_n 时,易错点是忽视 n 的取值范围,因此利用 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$ 求通项公式时,应当遵循以下步骤:a)当 $n=1$ 时,由 $a_1=S_1$,求得 a_1;b)当 $n\geqslant 2$ 时,由 $a_n=S_n-S_{n-1}$,求得 a_n 的表达式;c)检验 a_1 是否满足 b)中的表达式,若不满足则分段表示 a_n;d)写出 a_n 的完整表达式.

2.3　由绝对值讨论引起的分段

策略　分类讨论,建立联系

例 5　已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=-9$,且 $\frac{a_{n+1}}{2}$ 是 2 与 $a_n(n\in \mathbf{N}^*)$ 的等差中项.求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 G_n.

分析　由题意可知数列 $\{a_n\}$ 是以 -9 为首项,2 为公差的等差数列,进而分 $n\leqslant 5$ 和 $n>5$ 两种情况讨论求解.

解　在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=-9$,且 $\frac{a_{n+1}}{2}$ 是 2 与 $a_n(n\in \mathbf{N}^*)$ 的等差中项,整理得 $a_{n+1}-a_n=2$,故数列 $\{a_n\}$ 是以 -9 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=-9+2(n-1)$,即 $a_n=2n-11$.

当 $n>5$ 时,$a_n>0$;当 $n\leqslant 5$ 时,$a_n<0$.所以当 $n\leqslant 5$ 时,有

$$G_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-\frac{n(-9+2n-11)}{2}=-n^2+10n.$$

当 $n>5$ 时,有

$$G_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|+|a_6|+\cdots+|a_n|=-2(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n^2-10n+50.$$

故 $G_n=\begin{cases}-n^2+10n, & n\leqslant 5,\\ n^2-10n+50, & n>5.\end{cases}$

点评　求含有绝对值的数列的前 n 项和,直接求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和比较难,需要讨论 a_n 的正负性,如本题需要分 $n\leqslant 5$ 和 $n>5$ 两种情形分别求和.

2.4　由递推关系分段给出的分段数列

策略　多写几项,寻找周期

例 6　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=5$,$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-3, & a_n>3,\\ 2a_n, & a_n\leqslant 3\end{cases}(n\in \mathbf{N}^*)$,求 $S_{2\,022}$.

分析　根据递推公式,得到数列 $\{a_n\}$ 中的项依次为 5,2,4,1,2,4,1,2,4,1,… 即数列 $\{a_n\}$ 是从第 2 项起,以 3 为周期的数列,即可求出答案.

解　当 $a_1=5$ 时,$a_2=a_1-3=2$,$a_3=2a_2=4$,$a_4=a_3-3=1$,$a_5=2a_4=2$,$a_6=2a_5=4$,$a_7=a_6-3=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 中的项依次为 5,2,4,1,2,4,1,2,4,1,… 所以数列 $\{a_n\}$ 是从第 2 项起,以 3 为周期的数

列，每个周期的和为 $4+1+2=7$，所以

$$S_{2\,022}=5+7\times673+2+4=4\,722.$$

点评 本题通过赋值验算，找出了数列的周期性，揭示了问题的实质，使问题轻松获解.对于一个“陌生”的数列，常常多写式子、多写项，然后直观感知、发现思路.

2.5 以某一项为界的分段数列

策略 分类讨论，活用递推

例 7 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$a_1=\frac{3}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_1=a_1$，$b_2=-a_3$，$b_3=a_4$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=\begin{cases}b_n, & n\leqslant5,\\ 8a_n, & n>5,\end{cases}$ 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

分析 (1)利用等差数列的通项公式与等比中项性质列式可解得等差数列的公差和等比数列的公比，进而可得所求通项公式.

(2)对 n 分类讨论，结合等差数列与等比数列的求和公式可得 T_n.

解 (1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$d\neq0$，因为数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，所以 $b_2^2=b_1b_3$，所以 $a_3^2=a_1a_4$，所以 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+3d)$，所以 $a_1d+4d^2=0$.因为 $d\neq0$，所以 $a_1+4d=0$.又 $a_1=\frac{3}{2}$，所以 $d=-\frac{3}{8}$，所以 $a_n=-\frac{3}{8}n+\frac{15}{8}$，$b_1=\frac{3}{2}$，$b_2=-\frac{3}{4}$，数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{2}$，所以 $b_n=\frac{3}{2}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

(2)由(1)知 $c_n=\begin{cases}\frac{3}{2}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}, & n\leqslant5,\\ -3n+15, & n>5.\end{cases}$

当 $n\leqslant5$ 时，有

$$T_n=\frac{\frac{3}{2}[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=1-(-\frac{1}{2})^n,$$

当 $n>5$ 时，有

$$T_n=1-(-\frac{1}{2})^5+\frac{(n-5)(-3+15-3n)}{2}=$$
$$-\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32}.$$

$$\text{故 } T_n=\begin{cases}1-(-\frac{1}{2})^n, & n\leqslant5,\\ -\frac{3}{2}n^2+\frac{27}{2}n-\frac{927}{32}, & n>5.\end{cases}$$

点评 本题的第(2)问是分段数列问题，分段数列虽然与分段函数是不同类型的问题，但在结构、问题的逻辑推理上有相似之处，我们要类比分段函数进行求解，充分抓住数列问题的特点，使两者互帮互补、各用其长.

链接练习

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，且 $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$，其中 $k=1,2,3,\cdots$.

(1)求 a_3，a_5 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

链接练习参考答案

(1)因为 $a_2=a_1+(-1)=0$，$a_3=a_2+3=3$，$a_4=a_3+(-1)^2=4$，$a_5=a_4+3^2=13$，所以 $a_3=3$，$a_5=13$.

(2)因为 $a_{2k+1}=a_{2k}+3^k=a_{2k-1}+(-1)^k+3^k$，所以

$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=(-1)^k+3^k.$$

同理，有

$$a_{2k-1}-a_{2k-3}=(-1)^{k-1}+3^{k-1},\cdots,a_3-a_1=-1+3,$$

所以

$$(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\cdots+(a_3-a_1)=$$
$$[(-1)^k+(-1)^{k-1}+\cdots+(-1)]+[3^k+3^{k-1}+\cdots+3],$$

由此得 $a_{2k+1}-a_1=\frac{3}{2}(3^k-1)+\frac{1}{2}[(-1)^k-1]$.

于是

$$a_{2k+1}=\frac{3^{k+1}}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k-1,$$
$$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k=$$
$$\frac{3^k}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{k-1}-1+(-1)^k=\frac{3^k}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k-1.$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times\frac{1}{2}-1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n=\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\times\frac{1}{2}-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

(作者单位：1.江苏省无锡市第六高级中学
2.江苏省无锡市青山高级中学)