

让教师回归研究者的本色

——宁波市第14届高中数学教坛新秀课堂教学评比环节的思考

冯 斌

(浙江省宁波市教育局教研室 315100)

随着高中课程改革的深入,教学的核心聚焦在如何将学科核心素养落实到课堂教学上,而教师的专业水平和育人能力是落实的关键,传统的教学行为已经不足以承担时代赋予教师的重任,数学界对“数学育人要用数学的方式”、“学习即研究”、“教学即研究指导”的呼声比以往任何时候都来得强烈,这就意味着教师要以数学研究者的担当来促使数学核心素养育人目标的达成,以研究者的视角来理解数学、理解学生、理解教学、理解技术,以研究者的身份来践行课堂教学,以研究者的心态来反思自身的教学行为.作为本届高中数学教坛新秀评选活动的组织者,我们把“以评促研,以研促教”作为课堂教学评比环节的宗旨,为教师精心打造行动研究的舞台,唤起教师向研究者转型的内驱力.本文将本次比赛的所思、所想、所悟整理成文,与同行交流,期待抛砖引玉.

1 打破固有经验,促使参赛教师研究行为的发生

虽然教育教学活动依赖于教师教学经验的不断积累、创新与持续生成,但不可否认,教学经验中固有的“定势性”正成为阻止教师向研究者转型的一大障碍.很多教师认为,凭借自己多年积累的“经验”、既成的“模式与套路”,就足以应对教学任务与各类业务比武,自己的业务水平已臻于“娴熟精湛”,并不需要继续研究.结果,有的教师为维护旧有的经验而走向僵化、独断、作茧自缚^[1].因此,本次比赛在教学视角、教学载体、教学素材、教学节点等方面作了一些改进与创新,旨在打破固有经验,促使教师研究行为的发生.

1.1 以“单元教学”视角,促使参赛教师研究新的理论

根据笔者的教学观察,发现多数教师仍停留在“就课论课,只见树木不见森林”的课时教学设

计层面.《普通高中数学课程标准(2017版)》在教学建议中强调:整体把握教学内容,促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展.钟启泉教授认为“单元设计是撬动课堂转型的一个支点”,崔允漷教授也认为“学科核心素养呼唤大单元设计”.本届课堂教学的选题以“单元教学”为视角,要求参赛教师站在系统高度,依据课程标准和教材,对教材中具有某种内在关联性的内容进行分析,整体把握教学内容,制定学习目标、整合学习内容、分析学习要素、设计学习活动、进行学习评价.这也进一步要求教师针对平时教学中所暴露的问题,加强学习、研究,树立积极的、与时代发展同步的数学观、数学教学观,改进与优化数学教学,更好地履行自己的职责与使命^[2].

1.2 以“概念复习课”为载体,促使参赛教师研究新的课型

以往课堂教学比武通常以“概念新授课”与“章节复习课”为主,由于这两类课有很多“成功”的课例可供参考,使参赛教师把大量精力放在对已有课例的学习与借鉴上,课堂中“数学教学=解题教学=题型训练”的现象也很普遍,很少会考虑对课堂教学的整体改进与创新.本次比赛课融两类课型于一体,课型为“概念复习课”,要求参赛教师遵循“数学根本上是玩概念的”理念,以概念的再认知为目标开展复习课教学:既要立足数学概念的本质,深入挖掘概念的内涵与外延,又要注重在概念系统中认识概念,使概念得到充分的整合,将概念组织为具有层次性、立体化的结构体系,以增强概念的灵活迁移能力^[3].这样的复习课可以扭转教师只关题目而忽视概念、知识结构的弊病,从而提高学生对数学知识的认识水平,达到认知结构的清晰性、可辨别性、可利用性,以实现从

“知其然”到“知其所以然”再到“何由以知其所以然”的跨越。

1.3 以“参考材料”为素材,促使参赛教师研究“如何用教材教”

跟以往的不一样,本届比赛上课的内容没有直接指定上“教材中某章某节”,而是以课程标准和教材为基础,将教材的相关内容整合成“参考材料”,供教师进行教学加工,以此避免教师直接“教教材”的可能性,促使教师去研究如何创造性的“用教材教”。

执教对象:省一级重点中学的高二学生。

教学进度:已学完必修1、必修2、必修4、必修5、选修2-1第一章和第二章

课题1 椭圆的概念(高二复习课)

参考材料如下:

(1)人教A版《数学》(选修2-1)第41页例2;

(2)人教A版《数学》(选修2-1)第41页例3;

(3)人教A版《数学》(选修2-1)第47页例6;

(4)人教A版《数学》(选修2-1)第49页习题2.2A组第1题;

(5)人教A版《数学》(选修2-1)第49页习题2.2A组第7题;

(6)人教A版《数学》(选修2-1)第50页习题2.2B组第2题。

设计意图 数学概念是人脑对数学对象本质特征的反映,而本质特征往往有多种表现形式,从概念出发研究性质,实际上就是以概念所界定的本质特征为逻辑基础,去推出数学对象的其他本质特征,这就是“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提”的真正含义。本课题通过对教材的再挖掘、再认识,将教材中的同类问题整合成“参考材料”,这些材料所反映的就是椭圆的其他本质特征。本课题旨在促使教师回归教材,基于学生对椭圆的已有认识,在“一般观念”的指导下,循着“概念——性质(关系)——结构(联系)”的路径,引导学生以椭圆的定义为逻辑起点,对椭圆的性质及其内在联系展开“再认识”,使学生对椭圆的本质特征形成系统认识的同时,把数学基本思想、基本活动经验落实到位。

课题2 空间角的概念(高二复习课)

参考材料如下:

(1)2014年高考浙江卷理科第16题(移动靶射击问题,线面角与二面角);

(2)2015年高考浙江卷理科第8题(线线角与二面角问题);

(3)2016年4月浙江学考数学卷第18题(线线角与线面角的大小比较);

(4)2017年高考浙江卷第9题(二面角的平面角大小比较);

(5)2018年高考浙江卷第8题(三类角的大小比较)。

设计意图 纵观近几年浙江数学高考卷、学考卷,可以发现:试题进一步加强了对数学核心概念的考查力度,给人以源于教材、高于教材、题在书外、理在书中之感觉^[4]。本课题提供的“参考材料”将近几年空间三类角(线线角、线面角、面面角)的考题整合到一起,旨在促使教师回归数学本质,有层次地认识空间三类角及其内在联系。在课堂教学中,在“研究一个数学对象的基本套路”的指导下,循着“问题——活动——本质——应用”的路径,基于学生的认知规律设计系列化的数学育人活动,帮助学生学会围绕真正的数学问题进行“有逻辑地思考”,开展有数学含金量的教学活动,在问题解决的同时,领悟数学基本思想,积累数学思维和解决问题的经验,从而提升和发展数学学科核心素养。

1.4 以“18分钟”为教学节点,促使参赛教师研究片段教学

要求选手在18分钟时间内完成教学任务,是对参赛教师的巨大挑战。在这么短的时间内,如何基于学情引入课题、如何精选教学内容、如何凸显教学主题、如何设计问题系列、如何实现师生的有效互动、如何实现知识的自然生成、如何恰当的利用技术媒体……诸多问题都要求参赛教师运用自己的教育智慧构建教学过程,并将着力点放在关键片段上,从而实现“聚焦片段,成就精彩”的教学效果。

2 凸显系统思维视角,促使参赛教师研究“深度学习”

如何提高课堂教学质量和效益是教研的永恒话题。本届评选课的教学视角是“单元教学”,单

元教学的核心思想是系统思维^[5]. 学习即研究, 教学即研究指导, 在“既要重视教, 更要重视学, 促进学生学会学习”^[6]的理念下, 如何从整体的高度思考研究对象、组建学习单元, 在18分钟内促使深度学习真正发生是本节课研究的重点.

2.1 对椭圆概念的系统化认识

我们通常把椭圆、抛物线、双曲线通称为圆锥曲线. 它们的统一性可以从三个维度看. 从几何学的观点看, 它们都是由平面截圆锥得到的截线; 从点的轨迹看, 它们都是与定点和定直线距离的比是常数的点的轨迹; 从方程的形式看, 它们的方程都是关于 x, y 的二次方程, 因此这些曲线又称为二次曲线. 对椭圆概念的系统化认识也可以从以上三个维度切入.

(1) 椭圆为何称为圆锥曲线, 它与圆锥到底有什么关系

教师甲以“(人教A版《数学》(选修2-1)第41页例2)在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴垂线段 PD , D 为垂足. 当点 P 在圆上运动时, 线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么? 为什么?”为切入口, 首先揭示椭圆与圆的关系——椭圆可以看成是“压扁的圆”, 而圆可以看成平面截圆锥面所形成的曲线, 那椭圆是否也有类似的操作? 受此启发, 自然引入“丹德林双球模型”, 并由此得出椭圆的定义.

点评 虽然借助“丹德林双球模型”提炼椭圆的定义并不是首创之举, 但要从这个模型中引导学生自然发现“到两定点距离之和等于常数”这个结论也并非易事. 在新授课中我们一般很少采用这种方法, 一方面耗时, 另一方面对学生的思维要求很高. 但在这节课中, 通过类比圆的发现过程, 椭圆几何性质的获得水到渠成.

(2) 椭圆除了教材的定义, 还有没有其它形成方式

教师乙通过下面两个问题分别从距离之比、斜率之积呈现了椭圆的第二定义、第三定义, 让学生知道可以从不同的几何视角来描述椭圆的形成方式, 并且由此联想到双曲线、抛物线是否也有类似的定义? 椭圆、双曲线、抛物线三者是否有统一形式的定义?

问题1-1: 人教A版《数学》(选修2-1)第47页例6.

点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和它到直线 $l: x = \frac{25}{4}$ 的距离之比是常数 $\frac{4}{5}$, 求点 M 的轨迹方程.

问题1-2: 人教A版《数学》(选修2-1)第41页例3.

设点 A, B 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 求点 M 的轨迹方程.

教师丙以问题“在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(-a, 0), B(a, 0)$, 直线 AM, BM 的斜率乘积为 $-\frac{b^2}{a^2}$ ($a \neq b$), 顶点 M 的轨迹是什么?”为起点, 着重对椭圆的第三定义进行深入研究, 进一步得出了“若线段 AB 是经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中心的任意一条弦, M 是椭圆上任意异于 A, B 的点, 则恒有 $k_{MA}k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ ”的结论.

2.2 对数与形的统一化认识

解析几何的本质是用代数的方法研究图形的几何性质. 教学中一方面要求“以形求式”, 即通过曲线的几何特征建立曲线方程, 另一方面要求“以式论形”, 即通过曲线方程研究它们的几何性质, 形成数形统一的数学认知.

教师丁引导学生回溯教材中“椭圆标准方程”的推导过程, 通过深入剖析关键算式蕴含的几何意义, 建立数与形的有机联系, 进而不断地收获椭圆的“新定义”.

① $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ (平面内到两定点距离之和等于常数的点的轨迹);

② $a^2 - cx = a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, 变形为: $\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}$ (平面内到定点的距离与到定

直线距离之比为常数的点的轨迹);

③ $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, 变形为: $x^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}y\right)^2 = a^2$ (椭圆是由圆经过伸缩变换得到的);

④ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, 变形为: $\frac{y}{x+a} \cdot \frac{y}{x-a} =$

$-\frac{a^2-c^2}{a^2}(x \neq \pm a)$ (平面内到两定点斜率之积为常数 λ ($\lambda < 0, \lambda \neq -1$) 的点的轨迹).

点评 椭圆的本质特征有多种表现形式, 教师丁的教学以椭圆的定义及其标准方程的推导过程为认知起点, 对教材进行再挖掘, 通过“以式论形”, 引导学生充分认识椭圆的其他本质特征和内在联系, 体验到“解读方程结构, 捕捉运动轨迹”的韵味与奥秘.

2.3 对空间角的本质认知

空间三类角到底有什么内在联系? 如何比较它们之间的大小? 蕴含什么样的数学思想? 这些成为单元教学中应思考的关键问题, 教师戊对此作出了完美的阐释. 他首先抛出问题(课前发给学生的作业): 2018年高考浙江卷第8题(略), 并用定义法进行求解, 接着在图形中抽象出空间三类角, 在回顾空间三类角的定义后, 指出三类角在定义的表述上虽然不尽相同, 但都可以转化为“线线所成的角”来度量, 空间“三类角”实质都可以归结为“线线角”, 然后借助三个探究(课前发给学生的作业):

探究1: 已知 AP 为平面 α 的斜线, $AP \cap \alpha = A, AB \subset \alpha$, 设 AP 与平面 α 所成角为 θ_2 , AP 与 AB 所成的角为 θ_1 , 试比较 θ_1, θ_2 的大小.

探究2: 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ_3 ($\theta_3 < \frac{\pi}{2}$), $AP \subset \beta, BQ \subset \alpha$, 设 AP 与 BQ 所成角为 θ_1 , 试比较 θ_1, θ_3 的大小.

探究3: 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ_3 ($\theta_3 < \frac{\pi}{2}$), $AP \subset \beta$, 设 AP 与平面 α 所成角为 θ_2 , 试比较 θ_2, θ_3 的大小.

通过合作交流, 提炼总结, 获得了两个有用的性质:

性质1: “线面角是最小的线线角”, 即平面的斜线与这个平面所成的角是这条斜线与这个平面内任一条直线所成角中的最小者.

性质2: “二面角是最大的线面角”, 即对于一个锐二面角, 它的平面角是其中一个半平面内任一条直线与另一个半平面所成的线面角中的最大者.

最后, 在运用这两个性质解决“三类角”比大小问题中让学生进一步感悟“空间角”的本质, 掌握空间角之间的等价转换.

教师己的课与教师戊有异曲同工之妙, 他借助“鳖臑”模型, 从定性、定量两个角度引导学生对空间三类角作深入探究, 除了获得上述两条性质外, 还提出了三余弦定理: “若平面的一条斜线与这个平面所成的角为 α , 平面内的一条直线与这条斜线及其射影所成的锐角分别为 β, γ , 则有 $\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma$ ”; 三正弦定理: “设二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的度数为 θ_3 , 在平面 α 内有一条斜线 AC , 它与棱 AB 所成的角为 θ_1 , AC 与平面 β 所成的角为 θ_2 , 则 $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_3$ ”; 再应用所得结论求解 2018 年高考浙江卷第 8 题(略); 最后以“初闻不知角中意, 细品已是角中人; 角中联系今犹在, 挖掘内涵助提升”这首原创诗来诠释空间角研究的心路历程.

3 “教—研—评”一体化, 促使教师走向研究自觉

“教而不研则浅, 研而不教则空”, 高素质的教师队伍离不开教学研究. 现实中, 一方面, 教师忙于教学事务, 满足于“重复昨天的故事”, 研究意愿淡薄; 另一方面, 教师面对风起云涌的课改潮流, 不知道该研究什么, 怎么研究. 为了有效改变现状, 近几年宁波市高中数学学科采取了“教—研—评”三位一体的教研工作模式: 教——教学与实践、研——研究与反思、评——评价与改进. 比如, 本次教坛新秀评选工作, 为了充分发挥其在课堂教学中的“导向”功能, 我们以评价为突破口与发力点, 在变革评价机制的同时, 作了以下的教研工作跟进: 一是通过微信群, 将本次课堂教学环节评比中的信息及时反馈给参赛选手, 使得他们明确自身的优势、存在的问题、努力的方向; 二是通过“宁波市高中数学特级教师跨区域带徒”平台, 以“概念复习课教学”为主题进行深入的交流与研讨; 三是通过“宁波市高中数学新课程研训活动”, 呈现研究成果, 发挥上课教师的引领示范作用. 通过这些举措, 让教师感受到了研究的力量, 为教师向研究者的回归提供前进的动力.

当然, 平时的课堂教学与校本教研才是促使教师向研究者转型的“主战场”, 通过主题化的研修帮助教师树立研究的意识, 鼓励教师从课堂教学发现问题, 并且通过科学研究的方法解决问题、优化教学评价体系, 把教学研究作为评价的重要依据, 形成“教—研—评”一体化的良性循环, 从而使主动研究教材、研究学生、研究 (下转第 36 页)

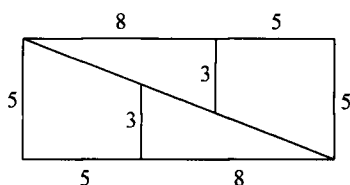


图 7

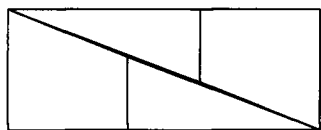


图 8

学生经过思考,会发现是否能拼成长方形是由裁剪的位置所决定的,在不知道具体数量的情况下,学生就会产生符号意识,通过“字母表示数”将图 6、图 7 中的数据 8、5 分别替换成 1 、 x ,如图 9、图 10,再利用剪拼前后的图形面积相等,列出方程 $x(x+1)=1$,即 $x^2+2x-1=0$,解得 $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
 ≈ 0.618 , $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去),从而得到了可以拼成的结论,并有了蕴藏着“黄金分割”的惊奇发现.

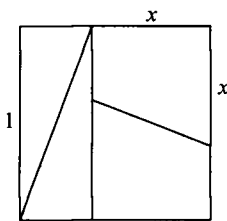


图 9

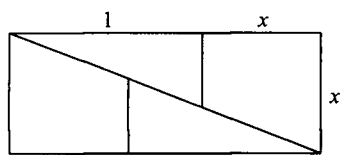


图 10

该实验中的问题 1 体现了数学的证伪与证实,问题 2 是对问题 1 的深入与延伸,两者共同构成了一个完整的正方形剪拼成等面积的长方形的探究过程.学生通过观察、猜想、操作、推理、验证,思维由形到数、再由数到字母,逐步获得了升华.显然,这样的数学活动有利于学生符号意识的形成与发展.

4 结束语

著名数学教育家弗赖登塔尔曾经这样描述数学的表达形式:“没有一种数学的思想,以它被发现时的那个样子公开发表出来.一个问题被解决后,相应地发展为一种形式化技巧,结果把求解过程丢在一边,使得火热的发明变成冰冷的美丽.”事实上,数学课本由于表达的需要,往往以逻辑严密的学术形态出现,呈现出冰冷的美丽,让学生望而生畏.教学的任务就是把它们重新颠倒过来,使它们借助自然形态的数学实验转化为学生容易接受的教育形态呈现出来.在“数与代数”的教学中,注重学生亲历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等活动,感悟概念、法则、性质的发现、形成与应用过程,形成主动利用符号进行表达、分析与解决问题的意识,才能让“冰冷的美丽”绽放为“火热的思考”,而这种学习体验恰恰是数学实验可以提供的.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012
- [2]教育部基础教育课程教材专家工作委会.义务教育数学课程标准(2011年版)解读[M].北京:北京师范大学出版社,2012
- [3]董林伟.数学实验在概念教学中的运用[J].数学通报,2015,54(8):24-27

(上接第 32 页)

教学、研究技术成为教师的一种职业自觉.

参考文献

- [1]张朝珍,张敏.基于经验的教师课堂生成性决策探析[J].当代教育科学,2008(14):8
- [2]李昌官.高中数学研究型教学[M].上海:华东师范大学出版社,2019,3:199

- [3]章建跃.章建跃教学教育随想录[M].浙江:浙江教育出版社,2017,6:665
- [4]冯斌.基于高中数学核心素养的教学设计与反思[M].宁波:宁波出版社,2018,10:251
- [5]章飞,顾继玲.单元教学的核心思想与基本路径[J].数学通报,2019,58(10):23
- [6]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:83