2022 届高三第一次大联考

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上．将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案；然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效

4．考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题．本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})+1=0$，则$|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2．设集合 $A=\{x|x^2+4x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x|\ln x<1\}$，则 $A\cap B=$

A．(0，5]　　B．(0，e)　　C．(0，1]　　D．(－1，5)

3．若二项式$(\frac{1}{2}-x)^n$的展开式中所有项的系数和为$\frac{1}{64}$，则展开式中二项式系数最大的项为

A．$-\frac{5}{2}x^3$　　B．$\frac{15}{4}x^4$　　C．$-20x^3$　　D．$15x^4$

4．航天之父、俄罗斯科学家齐奥科夫斯基(K．E．Tsiolkovsky)于 1903 年给出火箭最大速度的计算公式 $v=V_0\ln(1+\frac{M}{m_0})$．其中，$V_0$ 是燃料相对于火箭的喷射速度，M 是燃料的质量，m_0 是火箭(除去燃料)的质量，v 是火箭将燃料喷射完之后达到的速度．已知 $V_0=2$km/s，则

当火箭的最大速度 v 可达到 10km/s 时，火箭的总质量(含燃料)至少是火箭(除去燃料)的质量的(　　)倍

A．e^5　　　　B．e^5-1　　　　C．e^6　　　　D．e^6-1

5．在△ABC 中，“$A＜B$”是“$A-B＜\cos B-\cos A$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{b}=(1，\sqrt{3})$，则$|\boldsymbol{a}|$的取值范围是

A．[0，2]　　　　B．[0，4]　　　　C．[2，4]　　　　D．[1，4]

7．已知双曲线 C 的离心率为$\sqrt{3}$，F_1，F_2 是 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，$|PF_1|=3|PF_2|$，若△PF_1F_2 的面积为$\sqrt{2}$，则双曲线 C 的实轴长为

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．6

8．已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在$(-\infty，0]$上是减函数，$f(2)=0$，则不等式 $f(x-1)f(x)＜0$ 的解集是

A．$(-2，2)$　　　　B．$(-\infty，-2)\cup(1，2)$

C．$(-\infty，-1)\cup(0，3)$　　　　D．$(-2，-1)\cup(2，3)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．数据显示，全国城镇非私营单位就业人员平均工资在 2011 年为 40000 元，到了 2020 年，为 97379 元，比上年增长 7.6%．根据下图提供的信息，下面结论中正确的是

2011－2020 年城镇事私营单位就业人员年平均工资及增速

A．2011 年以来，全国城镇非私营单位就业人员平均工资逐年增长

B．工资增速越快，工资的绝对值增加也越大

C．与 2011 年相比，2019 年全国城镇非私营单位就业人员平均工资翻了一番多

D．2018 年全国城镇非私营单位就业人员平均工资首次突破 90000 元

10．已知函数 $f(x)=a^x(a>1)$，$g(x)=f(x)-f(-x)$，若 $x_1\neq x_2$，则

A．$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$

B．$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$

C．$x_1g(x_1)+x_2g(x_2)>x_1g(x_2)+x_2g(x_1)$

D．$g(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$

11．如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，…．设第 n 层有 a_n 个球，从上往下 n 层球的总数为 S_n，则

A．$S_5=35$　　B．$a_{n+1}-a_n=n$

C．$S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant2$　　D．$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=\frac{200}{101}$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin\dfrac{2\pi}{5}x，-\dfrac{15}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}，\\ |\log_2(x-1)|，x>\dfrac{5}{4}，\end{cases}$ 若存在实数 x_1，x_2，x_3，$x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=m$，则

A．$0\leqslant m\leqslant 1$　B．$x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$　C．$x_3x_4-x_3-x_4=0$　D．$x_3^2+x_4^2>8$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若随机变量 $X\sim B(n，\dfrac{1}{3})$，且 $E(X)\in\mathbf{N}^*$，写出一个符合条件的 $n=$_______.

14．直线 $y=x-1$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点 F，且与 C 交于 A，B 两点，则$|AB|=$_______.

15．已知$\theta\in[\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{\pi}{2}]$，$\sin2\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\theta=$_______.

16．现有一块正四面体形状的实心木块，其棱长为 9cm．车工师傅欲从木块的某一个面向内部挖掉一个体积最大的圆柱，则当圆柱底面半径 $r=$_______cm 时，圆柱的体积最大，且最大值为_______cm^3.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分)在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=3$，$AC=5$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(1)求 BC；

(2)若点 D 在边 BC 上，且满足 $AD=BD$，求 $\sin\angle DAC$.

18．(12 分)2021 年 1 至 4 月，教育部先后印发五个专门通知，对中小学生手机、睡眠、读物、作业、体质管理作出规定．“五项管理”是“双减”工作的一项具体抓手，是促进学生身心健康、解决群众急难愁盼问题的重要举措．为了在“控量”的同时力求“增效”，提高作业质量，某学校计划设计差异化作业．因此该校对初三年级的 400 名学生每天完成作业所用时间进行统计，部分数据如下表：

	男生	女生	总计
90 分钟以上	80	x	180
90 分钟以下	y	z	220
总计	160	240	400

(1)求 x，y，z 的值，并根据题中的列联表，判断是否有 95%的把握认为完成作业所需时间在 90 分钟以上与性别有关?

(2)学校从完成作业所需时间在 90 分钟以上的学生中用分层抽样的方法抽取 9 人了解情况，甲老师再从这 9 人中选取 3 人进行访谈，求甲老师选取的 3 人中男生人数大于女生人数的概率．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19．(12 分)已知 T_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项的积，且 $a_1=\frac{1}{2}$，S_n 为数列$\{T_n\}$的前 n 项的和，若 $T_n+2S_nS_{n-1}=0(n\in\mathbf{N}^*，n\geqslant 2)$.

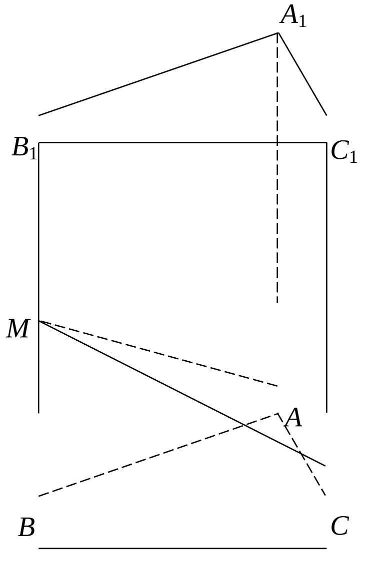
(1)求证：数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是等差数列；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

20．(12 分)如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，M 为 BB_1 的中点.

(1)记平面 ACM 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线为 l，证明：$l/\!/A_1C_1$；

(2)求二面角 $A-CM-B$ 的正弦值.



21．(12 分)已知函数 $f(x)=ax\ln x-\frac{1}{2}x^{2}-ax(a\in\mathbf{R})$其导函数为 $f'(x)$.

(1)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$的最大值；

(2)若 $f(x)$有两个极值点，求 a 的取值范围.

22．(12 分)在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(1，0)$，离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若过点 F 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，分别过 A，B 作 C 的切线 l_1，l_2，且 l_1 与 l_2 交于点 P，证明：O，P，M 三点共线.

2022 届高三第一次大联考

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上．将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案；然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效

4．考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题．本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})+1=0$，则$|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

2．设集合 $A=\{x|x^2+4x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x|\ln x<1\}$，则 $A\cap B=$

A．(0，5]　　B．(0，e)　　C．(0，1]　　D．(－1，5)

【答案】C

3．若二项式$(\frac{1}{2}-x)^n$的展开式中所有项的系数和为$\frac{1}{64}$，则展开式中二项式系数最大的项为

A．$-\frac{5}{2}x^3$　　B．$\frac{15}{4}x^4$　　C．$-20x^3$　　D．$15x^4$

【答案】A

4．航天之父、俄罗斯科学家齐奥科夫斯基(K．E．Tsiolkovsky)于 1903 年给出火箭最大速度的计算公式 $v=V_0\ln(1+\frac{M}{m_0})$．其中，$V_0$ 是燃料相对于火箭的喷射速度，M 是燃料的质量，m_0 是火箭(除去燃料)的质量，v 是火箭将燃料喷射完之后达到的速度．已知 $V_0=2$km/s，则当火箭的最大速度 v 可达到 10km/s 时，火箭的总质量(含燃料)至少是火箭(除去燃料)的质量的(　　)倍

A．e^5　　B．e^5-1　　C．e^6　　D．e^6-1

【答案】A

5．在△ABC 中，“$A<B$”是“$A-B<\cos B-\cos A$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{b}=(1，\sqrt{3})$，则$|\boldsymbol{a}|$的取值范围是

A．[0，2]　　B．[0，4]　　C．[2，4]　　D．[1，4]

【答案】B

7．已知双曲线 C 的离心率为$\sqrt{3}$，F_1，F_2 是 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，$|PF_1|=3|PF_2|$，若△PF_1F_2 的面积为$\sqrt{2}$，则双曲线 C 的实轴长为

A．1　　B．2　　C．3　　D．6

【答案】B

【解析】$PF_1-PF_2=2a$，$\therefore PF_2=a$，$PF_1=3a$，$F_1F_2=2c=2\sqrt{3}a$.

$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{9a^2+a^2-12a^2}{2\cdot 3a\cdot a}=\dfrac{-2a^2}{6a^2}=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 3a\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}a^2=\sqrt{2}$.

$\therefore a=1$，实轴长 $2a=2$，选 B.

8．已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在$(-\infty，0]$上是减函数，$f(2)=0$，则不等式 $f(x-1)f(x)<0$ 的解集是

A．$(-2，2)$　　B．$(-\infty，-2)\cup(1，2)$

C．$(-\infty，-1)\cup(0，3)$　　D．$(-2，-1)\cup(2，3)$

【答案】D

【解析】$-2<x<2$时，$f(x)<0$，$f(x-1)f(x)<0$，

则$\begin{cases}f(x-1)<0\\f(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x-1)>0\\f(x)<0\end{cases}$.

当$\begin{cases}f(x-1)<0\\f(x)>0\end{cases}$时，$\begin{cases}-2<x-1<2\\x>2或x<-2\end{cases}$，此时$2<x<3$；

当$\begin{cases}f(x-1)>0\\f(x)<0\end{cases}$时，$\begin{cases}x-1>2或x-1<-2\\-2<x<2\end{cases}$，此时$-2<x<-1$.

故答案选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．数据显示，全国城镇非私营单位就业人员平均工资在 2011 年为 40000 元，到了 2020 年，为 97379 元，比上年增长 7.6%．根据下图提供的信息，下面结论中正确的是

2011－2020 年城镇事私营单位就业人员年平均工资及增速

A．2011 年以来，全国城镇非私营单位就业人员平均工资逐年增长

B．工资增速越快，工资的绝对值增加也越大

C．与 2011 年相比，2019 年全国城镇非私营单位就业人员平均工资翻了一番多

D．2018 年全国城镇非私营单位就业人员平均工资首次突破 90000 元

【答案】AC

10．已知函数 $f(x)=a^x(a>1)$，$g(x)=f(x)-f(-x)$，若 $x_1\neq x_2$，则

A．$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$　　B．$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$

C．$x_1g(x_1)+x_2g(x_2)>x_1g(x_2)+x_2g(x_1)$　　D．$g(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$

【答案】AC

11．如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法・商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，⋯．设第 n 层有 a_n 个球，从上往下 n 层球的总数为 S_n，则

A．$S_5=35$　　B．$a_{n+1}-a_n=n$

C．$S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant 2$　　D．$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{100}}=\dfrac{200}{101}$

【答案】ACD

【解析】 $a_1=1$，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，……，$a_n-a_{n-1}=n$，

$\therefore a_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+3+6+10+15=35$，A 对；

$a_{n+1}-a_n=n+1$，B 错；

$n\geq 2$，$S_n-S_{n-1}=a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，C 对；

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{100}}=2(1-\dfrac{1}{2})+2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+2(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101})=2(1-\dfrac{1}{101})=\dfrac{200}{101}$，则选项 D 正确；

故答案选 ACD

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin\dfrac{2\pi}{5}x, & -\dfrac{15}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4},\\ |\log_2(x-1)|, & x>\dfrac{5}{4},\end{cases}$ 若存在实数 x_1，x_2，x_3，$x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=m$，则

A．$0\leqslant m\leqslant 1$　B．$x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$　　C．$x_3x_4-x_3-x_4=0$　　D．$x_3{}^2+x_4{}^2>8$

【答案】BCD

$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=m$，则$0<m<2$，A 错；

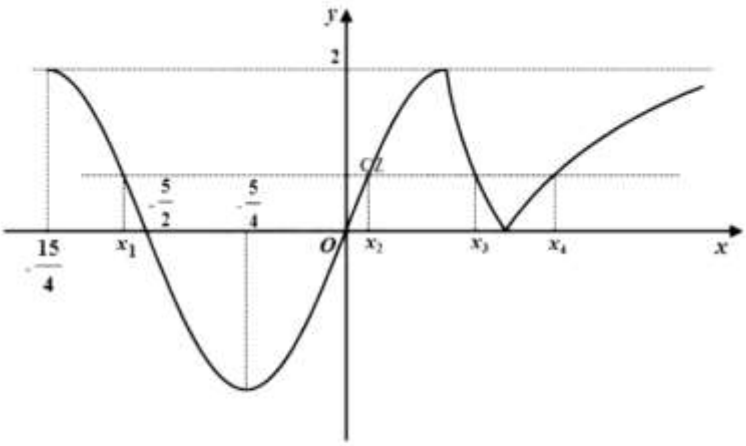
x_1,x_2关于$x=-\dfrac{5}{4}$对称，$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{5}{2}$，B 对；

$\left|\log_2(x_3-1)\right|=\left|\log_2(x_4-1)\right|$，$\therefore \log_2(x_3-1)+\log_2(x_4-1)=0$，$\therefore \log_2(x_3-1)(x_4-1)=0$.

$(x_3-1)(x_4-1)=1$，即$x_3x_4-x_3-x_4=0$，C 对；

$\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=1>2\sqrt{\dfrac{1}{x_3x_4}}$，$\therefore x_3x_4>4$，$x_3^2+x_4^2>2x_3x_4>8$，D 对；

故选 BCD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若随机变量 $X\sim B(n,\dfrac{1}{3})$，且 $E(X)\in\mathbf{N}^*$，写出一个符合条件的 n＝_______.

【答案】3(答案不唯一，3 的倍数即可)

14. 直线 $y=x-1$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点 F，且与 C 交于 A，B 两点，则$|AB|$＝_______.

【答案】8

15．已知$\theta\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$，$\sin2\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\theta$＝_______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，则$2\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，$\cos 2\theta<0$，$\cos 2\theta=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{1}{6}(3-2\sqrt{2})=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}$，

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

16．现有一块正四面体形状的实心木块，其棱长为 9cm．车工师傅欲从木块的某一个面向内部挖掉一个体积最大的圆柱，则当圆柱底面半径 r＝_______cm 时，圆柱的体积最大，且最大值为_______cm^3.

【答案】$\sqrt{3}$；$3\sqrt{6}\pi$

【解析】设圆柱上底面圆心为O_1，下底面圆心为O_2，O_2为正四面体底面中心.

圆柱的上底面与正四面体侧面ACD的交点N在侧面中线AM上.

$\because$正四面体棱长为 9，$\therefore BM=9\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore O_2M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$BO_2=3\sqrt{3}$，$AO_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 9=3\sqrt{6}$，

设圆柱底面半径为r，高为h.

由$O_1N\,//\,O_2M\Rightarrow\dfrac{r}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{6}-h}{3\sqrt{6}}$，$\therefore h=3\sqrt{3}-2\sqrt{2}r$.

$\therefore V_{圆柱}=\pi r^2\cdot(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$，

令$f(r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$，$f'(r)=6\sqrt{6}\pi r-6\sqrt{2}\pi r^2$，令$f'(r)=0\Rightarrow r=\sqrt{3}$，

$\therefore r=\sqrt{3}$时，$f(r)_{\max}=\pi\cdot 3\cdot\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)=3\sqrt{6}\pi$.

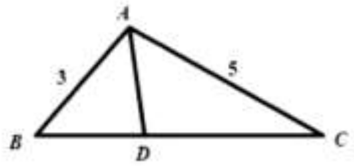
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分)在$\triangle ABC$ 中，已知 AB＝3，AC＝5，A＝$\dfrac{2\pi}{3}$.

(1)求 BC；

(2)若点 D 在边 BC 上，且满足 $AD=BD$，求 $\sin\angle DAC$.

【解析】



（1）$BC=\sqrt{9+25-2\times3\times5\times\cos\dfrac{2\pi}{3}}=7$.

（2）$\because AD=BD$，$\therefore \angle BAD=\angle B$，

$\cos B=\dfrac{9+49-25}{2\times3\times7}=\dfrac{11}{14}$，$\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

$\therefore \sin\angle DAC=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\angle B\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

18．(12 分)2021 年 1 至 4 月，教育部先后印发五个专门通知，对中小学生手机、睡眠、读物、作业、体质管理作出规定．“五项管理”是“双减”工作的一项具体抓手，是促进学生身心健康、解决群众急难愁盼问题的重要举措．为了在“控量”的同时力求“增效”，提高作业质量，某学校计划设计差异化作业．因此该校对初三年级的 400 名学生每天完成作业所用时间进行统计，部分数据如下表：

	男生	女生	总计
90 分钟以上	80	x	180
90 分钟以下	y	z	220
总计	160	240	400

(1)求 x，y，z 的值，并根据题中的列联表，判断是否有 95%的把握认为完成作业所需时间在 90 分钟以上与性别有关?

(2)学校从完成作业所需时间在 90 分钟以上的学生中用分层抽样的方法抽取 9 人了解情况，甲老师再从这 9 人中选取 3 人进行访谈，求甲老师选取的 3 人中男生人数大于女生人数的概率．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【解析】法一：

（1）$80+x=180$，$\therefore x=100$；

$80+y=160$，$\therefore y=80$；$80+z=220$，$\therefore z=140$.

$$K^2=\frac{400(80\times140-100\times80)^2}{180\times220\times160\times240}=\frac{800}{297}\approx2.7<3.841$$，

$\therefore$没有95%的把握认为完成作业所需时间在90分钟以上与性别有关.

（2）完成作业所需时间在90分钟以上的学生中有男生80人，女生100人，现分层抽样的方法抽9人，则男生抽4人，女生抽5人.

9人中选3人，共有$C_9^3=84$个结果，

男生人数大于女生有两种情形：

1°男生有3人女生0人，共$C_4^3C_5^0=4$个结果；

2°男生有2人女生1人，共$C_4^2C_5^1=30$个结果.

$\therefore$男生人数大于女生共34个结果，

$\therefore$男生人数大于女生的概率为$\dfrac{34}{84}=\dfrac{17}{42}$.

法二：

（1）列联表如下：

	男生	女生	合计
90 分钟以上	80	100	180
90 分钟以下	80	140	220
合计	160	240	400

$K^2=\dfrac{400(80\times140-100\times80)^2}{180\times220\times160\times240}\approx2.693<3.841$，

$\therefore$没有95%的把握认为完成作业所需时间在 90 分钟以上与性别有关.

（2）抽取的 9 人中，男生：4 人，女生：5 人，男生人数大于女生人数的情况分为：

①男生 2 人，女生 1 人；②男生 3 人，女生 0 人；

$\therefore$所求概率$P=\dfrac{C_4^2\cdot C_5^1}{C_9^3}+\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}+\dfrac{1}{21}=\dfrac{17}{42}$.

19．(12 分)已知 T_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项的积，且 $a_1=\dfrac{1}{2}$，S_n 为数列$\{T_n\}$的前 n 项的和，若 $T_n+2S_nS_{n-1}=0(n\in\mathbf{N}^*，n\geqslant2)$.

(1)求证：数列$\{\dfrac{1}{S_n}\}$是等差数列；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】

（1）证明：$\because T_n+2S_nS_{n-1}=0$，$\therefore S_n-S_{n-1}+2S_nS_{n-1}=0$.

$\therefore S_{n-1}-S_n=2S_nS_{n-1}\Rightarrow\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2(n\geq2)$，$\therefore\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是等差数列.

（2）$\dfrac{1}{S_n}=2+2(n-1)=2n$，$\therefore S_n=\dfrac{1}{2n}$.

$\therefore n \geq 2$时，$T_n = -2S_n \cdot S_{n-1} = -2 \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2n(n-1)}$；

$n \geq 3$时，$a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{-\frac{1}{2n(n-1)}}{-\frac{1}{2(n-1)(n-2)}} = \frac{n-2}{n}$.

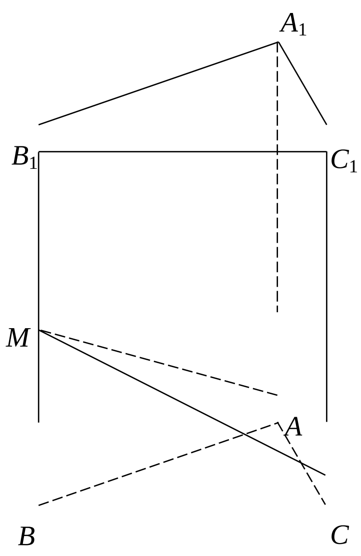
而$a_1 = \frac{1}{2}$，$T_2 + 2S_1S_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$，$a_1, a_2$均不满足上式.

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=1 \\ -\frac{1}{2}, & n=2 \\ \frac{n-2}{n}, & n \geq 3且n \in N^* \end{cases}.$$

20．(12 分)如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB \perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，M 为 BB_1 的中点．

(1)记平面 ACM 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线为 l，证明：$l /\!/ A_1C_1$；

(2)求二面角 $A-CM-B$ 的正弦值．



【解析】

（1）证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C_1 \parallel AC$.

$\because A_1C_1 \not\subset$ 平面 ACM，$AC \subset$ 平面 ACM，

$\therefore A_1C_1 \parallel$ 平面 ACM，$\because A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $A_1B_1C_1 \cap$ 平面 $ACM = l$，

$\therefore l \parallel A_1C_1$.

（2）取 BC 中点 E，连接 AE，过 E 作 $EF \perp CM$ 于点 F，连接 AF

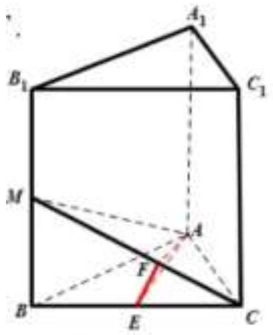
$\because AB = AC$，$\therefore AE \perp BC$，又 $\because MB \perp$ 平面 ABC，$\therefore MB \perp AE$.

$\because MB \cap BC = B$，$\therefore AE \perp$ 平面 BCM，$\therefore \angle AFE$ 即为所求二面角.

$AE = \dfrac{1}{2}BC = \sqrt{2}$，

由 $\triangle CEF \backsim \triangle CMB \Rightarrow \dfrac{EF}{MB} = \dfrac{CE}{CM} \Rightarrow \dfrac{EF}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore EF = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore AF = \sqrt{2 + \dfrac{2}{9}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，$\therefore \sin\angle AFE = \sqrt{2} \times \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.



21．(12 分)已知函数 $f(x)=ax\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-ax(a\in\mathbf{R})$其导函数为 $f'(x)$.

(1)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$的最大值；

(2)若 $f(x)$有两个极值点，求 a 的取值范围.

【解析】

（1）当$a=2$时，$f(x)=2x\ln x-\frac{1}{2}x^2-2x$，$f'(x)=2\ln x+2-x-2=2\ln x-x$.

令$g(x)=2\ln x-x$，$g'(x)=\frac{2}{x}-1$，令$g'(x)=0\Rightarrow x=2$.

且当$0<x<2$时，$g'(x)>0$，$g(x)\nearrow, f'(x)\nearrow$；当$x>2$时，$g'(x)<0$，$g(x)\searrow, f'(x)\searrow$，

$\therefore f'(x)_{\max}=f'(2)=2\ln 2-2$.

（2）$f'(x)=a\ln x+a-x-a=a\ln x-x$.

令$h(x)=f'(x)=a\ln x-x$，$h'(x)=\frac{a}{x}-1$，$\because f(x)$有两个极值点，

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点.

①当$a\le 0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上$\searrow$，$h(x)$不可能有两个零点，舍去.

②当$a>0$时，令$h'(x)=0\Rightarrow x=a$.

且当$0<x<a$时，$h'(x)>0$，$h(x)\nearrow$，当$x>a$时，$h'(x)<0$，$h(x)\searrow$.

要使$h(x)$有两个零点，必有$h(a)=a\ln a-a>0\Rightarrow a>\mathrm{e}$.

当$a>\mathrm{e}$时，注意到$h(1)=-1<0$，$h(a^2)=a\ln a^2-a^2<a^2-a^2=0$.

$\therefore h(x)$在$(1,a)$和(a,a^2)上各有一个零点x_1,x_2，

且当$0<x<x_1$时，$h(x)<0$，$f(x)\searrow$；当$x_1<x<x_2$时，$h(x)>0$，$f(x)\nearrow$；

当$x>x_2$时，$h(x)<0$，$f(x)\searrow$；

$\therefore f(x)$在$x=x_1$和$x=x_2$处分别取得极小值和极大值，有两个极值点，符合题意.

综上：a的取值范围为$(\mathrm{e},+\infty)$.

22．(12分)在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1，0)$，离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)若过点F的直线l交C于A，B两点，线段AB的中点为M，分别过A，B作C的切线l_1，l_2，且l_1与l_2交于点P，证明：O，P，M三点共线.

【解析】

（1）$\begin{cases} c=1 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线l的方程为：$x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，$P(x_3,y_3)$，

$\begin{cases} x=my+1 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow 3(m^2y^2+2my+1)+4y^2=12$，$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

$\therefore y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{-3m}{3m^2+4}$，$x_0=\dfrac{4}{3m^2+4}$，$\therefore k_{OM}=-\dfrac{3}{4}m$.

直线l_1的方程为：$\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$①，

直线l_2的方程为：$\dfrac{x_2x}{4}+\dfrac{y_2y}{3}=1$②，

②−①$\Rightarrow \dfrac{y}{3}(y_2-y_1)=\dfrac{x}{4}(x_1-x_2)$，

$\Rightarrow \dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=-\dfrac{3}{4}m$，$\therefore \dfrac{y_3}{x_3}=-\dfrac{3}{4}m=k_{OP}$，

$\therefore k_{OM}=k_{OP}$，即O,P,M三点共线.