江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（5）　　10.11

班级 ______________　　　　　　　姓名________________

1．已知△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\sqrt{3}(b - a\cos C) = c\sin A$.

(1) 求角 A 的值；

(2) 若 AC 边上的中线 BD 的长为$\sqrt{13}$，求△ABC 面积的最大值.

2. 设定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax(a\in\mathbf{R})$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若存在$x_{0}\in\left[1,+\infty\right)$，使得$f(x_{0})<\mathrm{e}-a$成立，求实数$a$的取值范围.

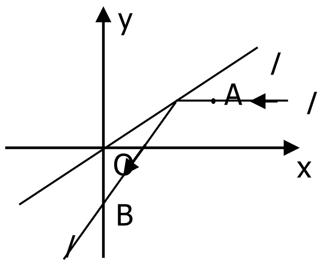
3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，平行于 x 轴且过点 A($3\sqrt{3}$，2)的

入射光线 l1 被直线 l：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 反射．

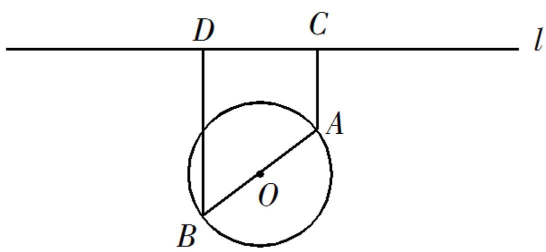
反射光线 l2 交 y 轴于 B 点，圆 C 过点 A 且与 l1, l2 都相切.

(Ⅰ)求 l2 所在直线的方程和圆 C 的方程；

(Ⅱ)设 P，Q 分别是直线 l 和圆 C 上的动点，求 PB＋PQ 的最小值及此时点 P 的坐标．



4. 如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径）．规划在公路 l 上选两个点 P、Q，并修建两段直线型道路 PB、QA．规划要求：线段 PB、QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径．已知点 A、B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD（C、D 为垂足），测得 AB=10，AC=6，BD=12（单位：百米）．



（1）若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长；

（2）在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由；

（3）对规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d（单位：百米）.求当 d 最小时，P、Q 两点间的距离．

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（5）答案　10.11

1．解：(1) 因为$\sqrt{3}$(b - acos C) = csin A，

由正弦定理得$\sqrt{3}$(sin B - sin Acos C) = sin Csin A.(2 分)

即 $\sqrt{3}$sin B = $\sqrt{3}$sin Acos C + sin Csin A，

即 $\sqrt{3}$sin Acos C + $\sqrt{3}$cos Asin C = $\sqrt{3}$sin Acos C + sin Csin A，(4 分)

所以 $\sqrt{3}$cos Asin C = sin Csin A.

因为 sin C≠0，所以 sin A = $\sqrt{3}$cos A，即 tan A = $\sqrt{3}$.(6 分)

因为 A∈(0，π)，所以 A = $\frac{\pi}{3}$.(8 分)

(2) 在△ ABD 中，由余弦定理得 AB2 + AD2 - 2·AB·AD·cos A = BD2，

即 13 = c2 + $\frac{b2}{4}$ - c·$\frac{b}{2}$≥$\frac{bc}{2}$，(10 分)

所以 bc≤26.(12 分)

所以 S△ABC = $\frac{1}{2}$bcsin A≤$\frac{1}{2}$×26×$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{13\sqrt{3}}{2}$，

即△ ABC 面积的最大值为$\frac{13\sqrt{3}}{2}$.(14 分)

2．【解析】（1）$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$．

当$a\le 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在 R 上为增函数；

当$a>0$时，由$f'(x)>0$，得$\mathrm{e}^x-a>0$，即$x>\ln a$，由$f'(x)<0$，得$x<\ln a$.

∴函数$f\left(x\right)$的单调增区间为$(\ln a,+\infty)$，减区间为$(-\infty,\ln a)$.

（2）存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f\left(x_0\right)<\mathrm{e}-a$成立，即$f(x)_{\min}<\mathrm{e}-a$成立.

由（1）知，当$a\le 0$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，则$f(x)_{\min}=f(1)=\mathrm{e}-a$，

不满足$f(x)_{\min}<\mathrm{e}-a$成立,

当$a>0$时，若$\ln a\le 1$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，则$f(x)_{\min}=f(1)=\mathrm{e}-a$，

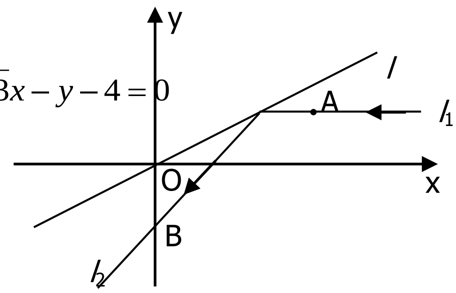
不满足 $f(x)_{\min} < \mathrm{e}-a$ 成立,

若 $\ln a > 1$，即 $a > \mathrm{e}$，则 $f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln a) < f(1) = \mathrm{e} - a$.

∴实数 a 的取值范围是 $(\mathrm{e}, +\infty)$.

3.（Ⅰ）直线 l1：y = 2, 设 l1 交 l 于点 D，则 D（$2\sqrt{3}$，2）∵l 的倾斜角为 30°,∴l2 的倾斜角为 60° ∴ $k_2 = \sqrt{3}$



∴反射光线 l2 所在直线的方程为 $y - 2 = \sqrt{3}(x - 2\sqrt{3})$ 即 $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$

已知圆 C 与 l1 切于点 A，设 C(a，b）

∵圆心 C 在过点 D 且与 l 垂直的直线上，∴ $b = -\sqrt{3}a + 8$ ①

又圆心 C 在过点 A 且与 l1 垂直的直线上， ∴ $a = 3\sqrt{3}$ ②

由①②得 $\begin{cases} a = 3\sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases}$ 圆 C 的半径 r = 3 故所求圆 C 的方程为 $(x - 3\sqrt{3})^2 + (y+1)^2 = 9$

（Ⅱ）设点 B(0, - 4）关于 l 的对称点 B′(x0 ,y0) 则 $\dfrac{y_0 - 4}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{x_0}{2}$ 且 $\dfrac{y_0 + 4}{x_0} = -\sqrt{3}$

得 B′($-2\sqrt{3}$, 2)，固定点 Q 可发现，当 B′，P，Q 共线时，PB + PQ 最小，故 PB + PQ 最小值为 B′C - 3

$\begin{cases} \dfrac{y+1}{2+1} = \dfrac{x - 3\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ 解得 $P(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$ ∴ PB + PQ 最小值为 B′C - 3 = $2\sqrt{21} - 3$

4.【解析】

解法一：

（1）过 A 作 $AE\perp BD$，垂足为 E.

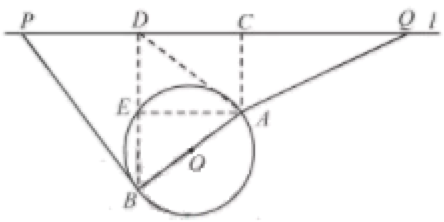
由已知条件得，四边形 ACDE 为矩形，$DE=BE=AC=6,\ AE=CD=8$.

因为 PB⊥AB，

所以$\cos\angle PBD=\sin\angle ABE=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

所以$PB=\dfrac{BD}{\cos\angle PBD}=\dfrac{12}{\frac{4}{5}}=15$.

因此道路 PB 的长为 15（百米）.



（2）①若 P 在 D 处，由（1）可得 E 在圆上，则线段 BE 上的点（除 B，E）到点 O 的距离均小于圆 O 的半径，所以 P 选在 D 处不满足规划要求.

②若 Q 在 D 处，连结 AD，由（1）知$AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=10$，

从而$\cos\angle BAD=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{7}{25}>0$，所以∠BAD 为锐角.

所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径.

因此，Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上，P 和 Q 均不能选在 D 处.

（3）先讨论点 P 的位置.

当∠OBP<90°时，线段 PB 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，点 P 不符合规划要求；

当∠OBP≥90°时，对线段 PB 上任意一点 F，OF≥OB，即线段 PB 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径，点 P 符合规划要求.

设 $a^{x+y}=M\cdot N$ 为 l 上一点，且 $P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，

此时 $P_1D=P_1B\sin\angle P_1BD=P_1B\cos\angle EBA=15\times\dfrac{3}{5}=9$；

当∠OBP>90°时，在 $\triangle PP_1B$ 中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，d≥15.

再讨论点 Q 的位置.

由（2）知，要使得 QA≥15，点 Q 只有位于点 C 的右侧，才能符合规划要求.当 QA=15 时，$CQ=\sqrt{QA^2-AC^2}=\sqrt{15^2-6^2}=3\sqrt{21}$.此时，线段 QA 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径.

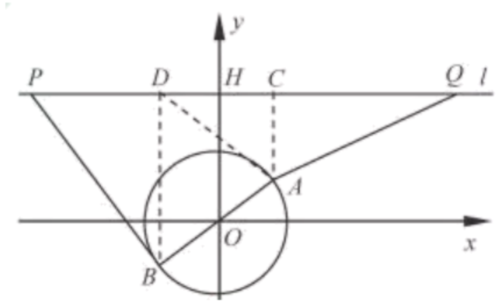
综上，当 PB⊥AB，点 Q 位于点 C 右侧，且 CQ=$3\sqrt{21}$时，d 最小，此时 P，Q 两点间的距离 PQ=PD+CD+CQ=17+$3\sqrt{21}$.

因此，d 最小时，P，Q 两点间的距离为 17+$3\sqrt{21}$（百米）.

解法二：

（1）如图，过 O 作 OH⊥l，垂足为 H.

以 O 为坐标原点，直线 OH 为 y 轴，建立平面直角坐标系.



因为 BD=12，AC=6，所以 OH=9，直线 l 的方程为 y=9，点 A，B 的纵坐标分别为 3，−3.

因为 AB 为圆 O 的直径，AB=10，所以圆 O 的方程为 x2+y2=25.

从而 A（4，3），B（−4，−3），直线 AB 的斜率为$\frac{3}{4}$.

因为 PB⊥AB，所以直线 PB 的斜率为$-\frac{4}{3}$，

直线 PB 的方程为 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{3}$.

所以 P（−13，9），$PB=\sqrt{(-13+4)^2+(9+3)^2}=15$.

因此道路 PB 的长为 15（百米）.

（2）①若 P 在 D 处，取线段 BD 上一点 E（−4，0），则 EO=4<5，所以 P 选在 D 处不满足规划要求.

②若 Q 在 D 处，连结 AD，由（1）知 D（−4，9），又 A（4，3），

所以线段 AD： $y=-\frac{3}{4}x+6(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

在线段 AD 上取点 M（3，$\frac{15}{4}$），因为 $OM=\sqrt{3^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}<\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径.

因此 Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上，P 和 Q 均不能选在 D 处.

（3）先讨论点 P 的位置.

当∠OBP<90°时，线段 PB 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，点 P 不符合规划要求；

当∠OBP≥90°时，对线段 PB 上任意一点 F，OF≥OB，即线段 PB 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径，点 P 符合规划要求.

设 $a^{x+y}=M\cdot N$ 为 l 上一点，且 $P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，此时 $P_1\left(-13,9\right)$；

当∠OBP>90°时，在 $\triangle PP_1B$ 中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，d≥15.

再讨论点 Q 的位置.

由（2）知，要使得 QA≥15，点 Q 只有位于点 C 的右侧，才能符合规划要求.

当 QA=15 时，设 Q（a，9），由 $AQ=\sqrt{(a-4)^2+(9-3)^2}=15(a>4)$，

得 a=$4+3\sqrt{21}$，所以 Q（$4+3\sqrt{21}$，9），此时，线段 QA 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径.

综上，当 P（−13，9），Q（$4+3\sqrt{21}$，9）时，d 最小，此时 P，Q 两点间的距离

$PQ=4+3\sqrt{21}-(-13)=17+3\sqrt{21}$.

因此，d 最小时，P，Q 两点间的距离为$17+3\sqrt{21}$（百米）.