构建函数探寻不等式求证思路

——以数学问题为例

黄如炎

(福建省闽清教师进修学校 350800)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》对逻辑推理素养水平三要求学生"对于新的数学问题,能够提出不同的假设前提,推断结论,形成数学命题;对于较复杂的数学问题,能够通过构建过渡性命题,探索论证的途径,解决问题"[1].《数学通报》传统栏目"数学问题解答"中的数学问题新颖而有难度,解答机智灵活,精彩纷呈,其中有不少好问题,是培养理性思维,发展高水平逻辑推理素养的难能素材.但许多数学问题没有给出思维过程,有些解答使人感到不够自然,突如其来.问题提的再好,如果问题的解答没有给人任何思维的启迪和思想的感悟,就失去了好问题的教育价值.解决难度较大的数学问题,往往需要提出某个假设或引理,构建函数是提出假设和引理的有效途径之一.本文以数学问题中的不等式为例,通过构建函数,利用函数的导数、图像、单调性、最值、极值等合乎情理地探寻不等式证明思路,以发展学生的逻辑推理素养.

问题1 正数 a、b、c 满足 $a+2b+3c\leqslant abc$,求 $5a+22b+c$ 最小值(数学问题2080[2]).

原解概要 本问题难度较大,引起了许多中数研究者的关注和探究.问题由黄兆麟老师提供,由于他是在赋予 a,b,c 具体值的情况下设置本问题,可根据已知 a、b、c 值和均值不等式取等号的条件,对式子进行变形配凑后用均值不等式求出最值[3].但在外人看来这种变形分拆神秘莫测,知其然不知其所以然.王淼生、杨先义、张青山等老师通过待定系数法、算术平均不等式、加权幂平均不等式等方法进行探究,虽然揭开了黄老师解题的神秘面纱,但都涉及到多元高次方程,求解过程十分艰难[4][5][6].下面通过构建函数既轻松解决问题又开启新的思维方式.

思路探寻1 视 a 为常量,把 $a+2b+3c\leqslant abc$ 化为 $\left(b-\frac{3}{a}\right)\left(c-\frac{2}{a}\right)\geqslant 1+\frac{6}{a^2}$,故点 $(b、c)$ 在双曲线 $\left(b-\frac{3}{a}\right)\left(c-\frac{2}{a}\right)=1+\frac{6}{a^2}$ 与第一象限围成的上方区域内.设 $s=5a+22b+c$,则 s 表示斜率为 -22 的动直线 $22b+c+5a=s$ 的纵截距,当动直线与双曲线相切时 s 最小.把双曲线方程化为 $c=\frac{a+2b}{ab-3}$,构建函数 $c=f(b)=\frac{a+2b}{ab-3}$,则 $f'(b)=\frac{-6-a^2}{(ab-3)^2}=-22$,即 $\frac{6+a^2}{(ab-3)^2}=22$ (1).

同理把 b 视为常量时,当斜率为 -5 的动直线 $5a+c+22b=s$ 与双曲线 $a+2b+3c=abc$ 相切时 s 最小.构建函数 $c=g(a)=\frac{a+2b}{ab-3}$,则 $g'(a)=\frac{-3-2b^2}{(ab-3)^2}=-5$,即 $\frac{3+2b^2}{(ab-3)^2}=5$ (2),(1)÷(2)得 $b=\sqrt{\frac{5a^2-36}{44}}$,由(1)得 $b=\frac{\sqrt{\frac{6+a^2}{22}}+3}{a}$,所以 $\frac{\sqrt{\frac{6+a^2}{22}}+3}{a}=\sqrt{\frac{5a^2-36}{44}}$, $44\left(\sqrt{\frac{6+a^2}{22}}+3\right)^2=a^2(5a^2-36)$,令 $\sqrt{\frac{6+a^2}{22}}=t>0$,即 $a^2=22t^2-6$,整理得 $55t^3-49t-6=0$,显然 $t=1$ 为方程的根,于是方程分解为 $(t-1)(55t^2+55t+6)=0$,由于 $t>0$,知 $55t^2+55t+6>0$,所以 $t=1$,即 $a=4$,$b=1$,代入 $a+2b+3c=abc$,得 $c=6$,故 $5a+22b+c$ 最小值为48.

方法提炼 对某些多元不等式,可视其中两

个元为变量(其它元为常量)构建函数,通过函数的导数、图像与性质解决问题.

思路探寻2 $a+2b+3c\leqslant abc$ 化为 $(bc-1)a\geqslant 2b+3c$,a,b,c 为正数,显然 $bc-1>0$,所以 $a\geqslant\frac{2b+3c}{bc-1}$,$5a+22b+c\geqslant\frac{10b+15c}{bc-1}+22b+c$.构建函数 $f(c)=\frac{10b+15c}{bc-1}+22b+c$,$f'(c)=\frac{(bc-1)^2-10b^2-15}{(bc-1)^2}$,令 $f'(c)=0$,$bc-1=\sqrt{15+10b^2}$,$c=\frac{1+\sqrt{15+10b^2}}{b}$.显然当 $c\in\left(\frac{1+\sqrt{15+10b^2}}{b},+\infty\right)$ 时,$f'(c)>0$,$f(c)$ 递增,当 $c\in\left(0,\frac{1+\sqrt{15+10b^2}}{b}\right)$ 时,$f'(c)<0$,$f(c)$ 递减,所以 $f(c)_{\min}=f\left(\frac{1+\sqrt{15+10b^2}}{b}\right)=\frac{2\sqrt{15+10b^2}}{b}+22b+\frac{16}{b}$.

构建函数 $g(b)=\frac{2\sqrt{15+10b^2}}{b}+22b+\frac{16}{b}$,

$g'(b)=\frac{(22b^2-16)\sqrt{15+10b^2}-30}{b^2\sqrt{15+10b^2}}$,令 $g'(b)=0$,

即 $(11b^2-8)\sqrt{15+10b^2}-15=0$,该方程不便直接求解,如能猜出方程的根就容易了(先猜后证是数学研究重要之道),希望 $\sqrt{15+10b^2}$ 不是根式即 $15+10b^2$ 为平方数时,自然想到 $b=1$,恰有 $g'(1)=0$,当 $b\in(1,\infty)$ 时,显然 $(22b^2-16)\cdot\sqrt{15+10b^2}-30>0$,即 $g'(b)>0$,$g(b)$ 递增,当 $b\in(0,1)$ 时,$g'(b)<0$,$g(b)$ 递减,所以 $g(b)_{\min}=g(1)=48$,故 $5a+22b+c\geqslant f(c)\geqslant g(b)\geqslant 48$,当且仅当 $b=1$,$c=\frac{1+\sqrt{15+10b^2}}{b}=6$,$a=\frac{2b+3c}{bc-1}=4$ 时,等号成立,所以 $5a+22b+c$ 最小值为 48.

方法提炼 对某些关于 a,b,c 式子的最值,可先构建关于某个字母为自变量的函数 $f(a)$(或 $f(b)$,$f(c)$),求出最值 $g(b,c)$(或 $g(a,c)$,$g(a,b)$),再构建另一字母为自变量函数 $g(b)$(或 $g(c)$,$g(a)$),求出最值 $h(c)$(或 $h(a)$,$h(b)$),再求出 $h(c)$(或 $h(a)$,$h(b)$)最值.

问题2 若 $a,b,c>0$,$a^\pi+b^\pi+c^\pi=3$,则 $a^e+b^e+c^e\leqslant 3$(数学问题2293[7]).

原解要点 直接引入函数 $f(x)=ex^\pi-\pi x^e$,此函数是如何构建的呢?

思路探寻 已知等式中含有 a^π,所证不等式中含有 a^e,探寻关于 a^π 与 a^e 可能具有的不等关系.假设 $a^e\leqslant ma^\pi+n$(m,n 为待定常数),构建函数 $f(x)=x^e-mx^\pi-n$,$x>0$,则 $f'(x)=ex^{e-1}-\pi mx^{\pi-1}$,显然 $a=b=c=1$ 时,所证不等式等号成立,因此当 $x=1$ 时,$f(x)$ 可能取得极大值 0.由 $f(1)=0$,$f'(1)=0$,即 $\begin{cases}1-m-n=0\\ e-\pi m=0\end{cases}$,解得 $m=\frac{e}{\pi}$,$n=1-\frac{e}{\pi}$,此时 $f'(x)=e(x^{e-1}-x^{\pi-1})$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 递增,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 递减,所以 $f(x)\leqslant f(x)_{\min}=f(1)=0$,即 $x^e\leqslant\frac{e}{\pi}x^\pi+1-\frac{e}{\pi}$,从而

$a^e+b^e+c^e\leqslant\frac{e}{\pi}(a^\pi+b^\pi+c^\pi)+3-\frac{3e}{\pi}=3$.

方法提炼 对某些多元对称不等式,可根据不等式结构特征,利用不等式等号成立时函数取得极值探寻不等式 $g(a)\geqslant h(a)$,即构造函数 $f(x)=g(x)-h(x)$ 解决问题,此方法比利用切线寻找函数的一次估计式更具有一般性.

问题3 设正数 a、b、c 满足 $a^2+b^2+c^2+abc=4$,求证:$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant 3$.

(数学问题2329[8])

原解要点 把 $\frac{1}{2-a}$ 变形为 $\frac{1}{2}+\frac{a}{2(2-a)}=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2a(2-a)}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}$,较难想到.

思路探寻 根据已知等式和所证不等式结构,探寻关于 $\frac{1}{2-a}$ 与 a^2 可能具有的不等关系.从已知不等式知 $0<a<2$,假设 $\frac{1}{2-a}\geqslant ma^2+n$($m$、$n$ 为待定常数),即 $(ma^2+n)(2-a)-1\leqslant 0$,构建函数 $f(x)=(mx^2+n)(2-x)-1$,$0<x<2$,则 $f'(x)=-3mx^2+4mx-n$,显然当 $a=b=c=1$ 时,所证不等式等号成立,因此 $x=1$ 时 $f(x)$ 可能取得极大值 0,由 $\begin{cases}f(1)=m+n-1=0\\ f'(1)=m-n=0\end{cases}$,解得 $m=$

$n=\frac{1}{2}$，此时 $f'(x)=-\frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$，当 $x\in(1,2)$ 和 $x\in(0,\frac{1}{3})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x\in(\frac{1}{3},1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=0$，故当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant 0$，所以 $\frac{1}{2-x}\geqslant\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$. 另一方面 $4=a^2+b^2+c^2+abc\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+abc$，令 $\sqrt[3]{abc}=t$，则 $t^3+3t^2-4\leqslant 0$，即 $(t-1)(t+2)^2\leqslant 0$，$t\leqslant 1$，$abc\leqslant 1$，从而 $a^2+b^2+c^2=4-abc\geqslant 3$，

故 $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2}\geqslant 3$.

问题 4 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，则 $a^ab^bc^c\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{b+c}{2}}\left(\frac{c+a}{2}\right)^{\frac{c+a}{2}}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.（数学问题 2298[9]）

原解要点 先证明引理 $a^ab^b\geqslant(a+b)^{\frac{a+b}{2}}$，再引入函数 $f(x)=x\ln\frac{2x}{x+1}-\ln\frac{x+2}{2}$，但引理是怎么想到的，函数是如何构建的？对右边不等式的证明也令人费解和过于复杂.

思路探寻 为证 $a^ab^b\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{b+c}{2}}\cdot\left(\frac{c+a}{2}\right)^{\frac{c+a}{2}}$，根据不等式结构假设 $a^ab^b\geqslant[m(a+b)]^{n(a+b)}$，由当 $a=b$ 时所证不等式等号成立，得 $a^{2a}=(2ma)^{2ma}$，即 $m=\frac{1}{2}$，$n=1$，下面证明 $a^ab^b\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ (1). (1)式化为 $a\ln a+b\ln b\geqslant(a+b)\ln\frac{a+b}{2}$，$a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}\geqslant 0$ 即 $\frac{a}{b}\ln\frac{2\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}+\ln\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\geqslant 0$，令 $\frac{a}{b}=x$，不妨设 $a\geqslant b>0$，即 $x\geqslant 1$，则(1)等价于 $x\ln\frac{2x}{x+1}-\ln\frac{x+1}{2}\geqslant 0$，构建函数 $f(x)=x\ln\frac{2x}{x+1}-\ln\frac{x+2}{2}$，$x\geqslant 1$，$f'(x)=\ln\frac{2x}{x+1}=\ln\left(2-\frac{2}{x+1}\right)$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 即 $a=b$ 时等号成立，故(1)式成立. 于是 $a^ab^b\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$，同理 $b^bc^c\geqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^{b+c}$，$c^ca^a\geqslant\left(\frac{c+a}{2}\right)^{c+a}$，把此三式相乘再开平方得左边不等式.

令 $\frac{a+b}{2}=x$，$\frac{b+c}{2}=y$，$\frac{c+a}{2}=z$，则右边所证不等式化为 $x^xy^yz^z\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$，只要证 $x\ln x+y\ln y+z\ln z\geqslant(x+y+z)\ln\frac{x+y+z}{3}$. 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$，构建函数

$f(x)=x\ln x+y\ln y+z\ln z-(x+y+z)\cdot\ln\frac{x+y+z}{3}$，$f'(x)=\ln\frac{3x}{x+y+z}\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，从而

$f(x)\geqslant f(y)=2y\ln y+z\ln z-(2y+z)\ln\frac{2y+z}{3}$，

构建函数 $g(y)=2y\ln y+z\ln z-(2y+z)\cdot\ln\frac{2y+z}{3}$，$g'(y)=\ln\frac{3y}{2y+z}\geqslant 0$，$g(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$g(y)\geqslant g(z)=0$，故 $f(x)\geqslant f(y)\geqslant g(z)=0$，当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立.

方法提炼 对某些关于 a,b,c 对称的不等式 $f(a,b,c)\geqslant 0$（或 $f(a,b,c)\leqslant 0$），不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，先构建关于 a 的函数 $f(a,b,c)$，证明 $f(a,b,c)$ 具有单调性后得到 $f(a,b,c)\geqslant f(b,b,c)$（或 $f(a,b,c)\leqslant f(b,b,c)$），再构建关于 b 的函数 $g(b,c)=f(b,b,c)$，证明 $g(b,c)$ 具有单调性后得 $g(b,c)\geqslant g(c,c)=0$（或 $g(b,c)\leqslant g(c,c)=0$）.

方法提炼 对关于 a,b 的不等式若能化为只含一元的不等式或 $f(a)\geqslant f(b)$（$f(a)\leqslant f(b)$）的形式，则可构造函数 $f(x)$. 如求证 $2017^{2018}>2018^{2017}$，把 $2017^{2018}>2018^{2017}$ 化为 $\frac{\ln 2017}{2017}>\frac{\ln 2018}{2018}$，构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，故 $\frac{\ln 2017}{2017}>\frac{\ln 2018}{2018}$.

问题 5 求证：$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{8}{5}$（$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 55$）（数学问题 2125[10]）.

原解要点　直接引入不等式 $\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{7920}{(89k+55)(89k-34)}=\frac{144k}{89k+55}-\frac{144(k-1)}{89k-34}$（*），该不等式又是如何构建的呢？

思路探寻　为使所证不等式左边求和时能消项，假设 $\begin{cases}\frac{1}{n^2}\geqslant f(n)-f(n-1),n\geqslant 2\\ f(1)=1,n=1\end{cases}$，

根据 $\frac{1}{n^2}$ 结构，$f(n)$ 应为分式且分子分母为 n 的一次式，故构建函数 $f(n)=\frac{cn}{an+b}$（a、b、c 为待定常数），由 $f(1)=1$ 得 $c=a+b$，即 $f(n)=\frac{(a+b)n}{an+b}$，于是 $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>f(n)=\frac{(a+b)n}{an+b}$，要证 $n\geqslant 55$ 时，$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{8}{5}$，令 $f(55)=\frac{8}{5}$，整理为 $55a=89b$ 取 $a=89,b=55$，得 $f(n)=\frac{144n}{89n+55}$，此时 $\frac{1}{n^2}\geqslant f(n)=f(n-1)$ 即为 $\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{144n}{89n+55}-\frac{144(n-1)}{89n-34}$，等价于 $n^2+89\times 21n-55\times 34\geqslant 0$，此式当 $n\geqslant 1$ 时显然成立．原来（*）式是这样构建出来的．所以当 $n\geqslant 55$ 时，$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>f(n)=\frac{144n}{89n+155}=\frac{144}{89+\frac{55}{n}}\geqslant\frac{8}{5}$.

方法提炼　对某些不可求和数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和的不等式，可构建函数 $f(n)$ 使 $a_1=f(1)$，$a_n\geqslant f(n)-f(n-1)$（或 $a_n\leqslant f(n)-f(n-1)$），$n\geqslant 2$.

问题 6　设 $a,b,c>0$，$a+b+c\leqslant 3$，求证：$\frac{1}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\geqslant\frac{1}{4}$（数学问题 2398[11]）.

原解要点　通过变形、配凑后用 5 元算术—几何平均不等式证明．也可构建函数证明如下．

思路探寻　不妨设 $0<c\leqslant b\leqslant a<3$，构建函数 $f(a)=\frac{1}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$，显然 $f(a)$ 在 $(0,3)$ 上递减，因为 $a\leqslant 3-b-c$，所以 $f(a)\geqslant f(3-b-c)=\frac{1}{bc(3-b-c)}-\frac{(3-b-c)^2+b^2+c^2}{3}$，构建函数

$g(c)=\frac{1}{bc(3-b-c)}-\frac{(3-b-c)^2+b^2+c^2}{3}$，$g'(c)=(b+2c-3)\left(\frac{1}{bc^2(3-b-c)^2}-\frac{1}{2}\right)$．由于 $b+2c-3\leqslant a+b+c-3\leqslant 0$，$bc^2(3-b-c)^2=\frac{1}{2}2bcc(3-b-c)(3-b-c)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)^5<2$，

所以 $g'(c)\leqslant 0$，$g(c)$ 在 $(0,3)$ 上递减，故

$$g(c)\geqslant g(b)=\frac{1}{b^2(3-2b)}-\frac{(3-2b)^2+2b^2}{4},$$

构建函数

$$h(b)=\frac{1}{b^2(3-2b)}-\frac{(3-2b)^2+2b^2}{4},$$

$$h'(b)=3(b-1)\left(\frac{2}{b^3(3-2b)^2}-1\right),$$

$b^3(3-2b)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{4b}{3}\frac{4b}{3}\frac{4b}{3}(3-2b)(3-2b)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^5<2$，所以当 $b\in(1,3)$ 时，$h'(b)>0$，$h(b)$ 递增，当 $b\in(0,1)$ 时，$h'(b)<0$，$h(b)$ 递减，故 $h(b)\geqslant h(1)=\frac{1}{4}$，$f(a)\geqslant g(c)\geqslant h(b)\geqslant\frac{1}{4}$，等号当且仅当 $b=1,c=b,a=3-b-c$，即 $a=b=c=1$ 时成立.

由上可见，有些难度较大的不等式（最值）问题，表面看似与函数无关但背后往往蕴藏着某个函数，如能揭示所隐含的函数，通过研究函数的性质与图像可化难为易，其优点无需证明不等式所用的较强技巧和超出中学范围的不等式公式．此类不等式（最值）问题不仅在《数学通报》的数学问题中频频出现，在各类竞赛题和近年高考压轴题中也时有出现，学生对此不知所措，束手无策，应引起教师教学上的重视．构建函数探寻不等式（最值）求证（解）思路的关键在于根据不等式结构特征，或将不等式变形转化后构建以某个量为自变量的函数，通过研究函数的单调性、最值、极值、切线和图像后解决问题．构建函数在三角、数列、解析几何、立体几何、函数等问题中有着同样的运用，限于篇幅不一一列举.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定．普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018

（下转第 62 页）

2517　已知如图 1，在$\odot O$中，弦$B_1C_1 /\!/ B_2C_2$，且$B_1C_1=B_2C_2$，O_1、O_2分别为B_1C_1、B_2C_2的中点，点A在C_2C_1的延长线上，$CF_1\perp AO_1$于点F_1，与AB_1交于点E_1，$CF_2\perp AO_2$于点F_2，与AB_2交于点E_2.求证：

$$\frac{B_1E_1}{E_1A}+\frac{B_2E_2}{E_2A}\geqslant\frac{B_1C_1{}^2}{AC_1\cdot AC_2}.$$

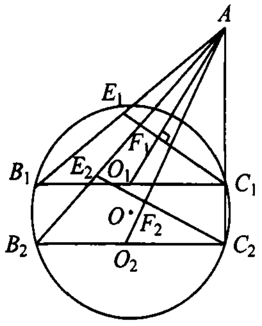


图 1

（北京市朝阳区芳草地国际学校富力分校　郭文征　郭璋　100121）

2518　设P是$\triangle ABC$内的任意点，三条边长、外接圆半径与内切圆半径、点P到三边BC，CA，AB的距离分别为a,b,c,R,r,x,y,z，则有

$$R\geqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$$

$$\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$\geqslant\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}$$

$$\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{bc+ca+ab}$$

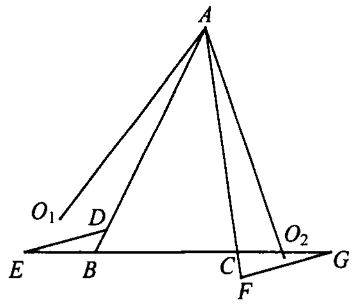
$$\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})$$

$$\geqslant\frac{1}{3}(\sqrt{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{2R}\sqrt[6]{xyz}$$

（天津水运高级技工学校 黄兆麟 300456）

2519　在$\triangle ABC$中，$AB>AC>BC$，D,E,F,G四点分别在射线AB,CB,AC,BC上，且满足$AD=CE=AC$及$AF=BG=AB$，证明：$\triangle BDE$的外心O_1和$\triangle CFG$的外心O_2到点A的距离相等.



（河南辉县一中　贺基军　453600）

2520　设$\triangle ABC$的三边长、相应旁切圆半径、外接圆半径、内切圆半径和半周长分别为a,b,c,r_a,r_b,r_c,R,r和p，则有$\frac{3\sqrt{3}R}{2r}\geqslant\frac{2(r_a+r_b)}{a+b}+\frac{2(r_b+r_c)}{b+c}+\frac{2(r_c+r_a)}{c+a}$，等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

（安徽省太和县第二小学 任迪慧 236630）

（上接第 51 页）

[2] 黄兆麟.数学问题 2080 解答[J].数学通报，2012(9)
[3] 黄兆麟.2080 号题是这样编出来的[J].数学通讯(下半月)，2015(11)
[4] 王淼生.追寻数学问题 2080 解答了本来面目[J].数学通报，2013(11)
[5] 杨先义.也谈数学通报数学问题 2080 的解答[J].数学通讯(下半月)，2014(11)
[6] 张青山.对数学问题 2080 的探究[J].数学通报，2016(12)
[7] 邵剑波.数学问题 2293 解答[J].数学通报，2016(4)
[8] 晓阳.数学问题 2329 解答[J].时通报，2016(11)
[9] 黄兆麟.数学问题 2298 解答[J].数学通报，2016(5)
[10] 刘永春.数学问题 2125 解答[J].数学通报，2013(6)
[11] 安振平.数学问题 2398 解答[J].数学通报，2018(1)