高考题中抛物线切点弦问题的思考

程　光
重庆第四十二中学校　400010

［摘　要］多年来全国卷压轴题中大部分圆锥曲线压轴问题都是椭圆问题，但是有些时候也会出现抛物线问题，学生对于抛物线问题的处理和得分情况从高考反馈上来看并不好.文章从2019年全国高考三卷压轴题中有关抛物线切点弦问题展开，结合重庆市模拟题出现的一些类似问题对其进行了总结.

［关键词］直线的斜率；抛物线的切线；抛物线的切点弦；轨迹方程

（2019年全国卷三文数第21题）

已知曲线C：$y=\frac{x^2}{2}$，D为直线$y=-\frac{1}{2}$上的动点，过D作C的两条切线，切点分别为A，B.

(1)证明：直线AB过定点.

(2)若以$E\left(0,\frac{5}{2}\right)$为圆心的圆与直线$AB$相切，且切点为线段$AB$的中点，求该圆的方程.

本道题是在2019年高考文数第21题压轴题的位置出现，其中第(1)问中学生得分普遍不是很高，有些人即使能得分，但是方法较为烦琐，下面笔者将对于第(1)问这一类的问题进行展开处理.我们先看看第(1)问答案的一般处理方式.

(1)证明：设$D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，$A(x_1,y_1)$，则$x_1^2=2y_1$.

由$y'=x$，所以切线DA的斜率为x_1，故$\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$.

整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B(x_2,y_2)$，同理可得$2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$.

所以直线AB过定点$\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

在第(1)问证明当中得到如下两个式子$2tx_1-2y_1+1=0$，$2tx_2-2y_2+1=0$，故直线AB的方程为$2tx-2y+1=0$.

我们不妨把以上方程形式叫做同构形式，下面笔者将以同构形式进行展开处理.

解：设切点坐标$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，

则过A的切线方程可以直接写成$xx_1=y+y_1$(1)，

同理过B的切线方程为$xx_2=y+y_2$(2)，

由于A，B都过点$D\left(t,-\frac{1}{2}\right)$，故两个方程可以写成$\begin{cases}tx_1=-\frac{1}{2}+y_1,\\tx_2=-\frac{1}{2}+y_2,\end{cases}$由同构形式可知切点弦方程为$tx=-\frac{1}{2}+y$，

则直线恒过定点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

此处做一下改变，若D点坐标是抛物线外任意一点，我们看看会有什么样的变化，此时我们设$D(x_0,y_0)$.

将D带入（1）和（2）中我们得到$\begin{cases}x_0x_1=y_0+y_1,\\x_0x_2=y_0+y_2,\end{cases}$故切点弦方程为$x_0x=y_0+y$，通过观察我们知道这个切点弦方程形式和点在抛物线上的切线形式是一致的，故我们可以得到如下结论：

过抛物线外一点$P(x_0,y_0)$引抛物线$y^2=2px$的两条切线，切点分别是A，B，那么AB的直线方程为$yy_0=p(x+x_0)$，直线AB的斜率$k=\frac{p}{y_0}$，直线斜率只和P的纵坐标有关.

过抛物线外一点$P(x_0,y_0)$引抛物线$x^2=2py$的两条切线，切点分别是A，B，那么AB的直线方程为$xx_0=p(y+y_0)$，直线AB的斜率$k=\frac{x_0}{p}$，直线斜率只和P的横坐标有关.

对此，我们可以处理如下问题.

例1：已知抛物线$x^2=4y$的焦点为F，

作者简介：程光(1987–)，本科学历，中学二级教师，重庆市渝中区许正川名师工作室成员，从事数学教学研究.

过直线$y=x-2$上任意一点引抛物线的两条切线，切点为A，B，则点F到直线AB的距离(　　)

A. 无最小值

B. 无最大值

C. 有最小值，最小值为1

D. 有最大值，最大值为$\sqrt{5}$

由以上结论可知设$P(x_0,y_0)$，并且P在直线$y=x-2$上，故$y_0=x_0-2$.

切点弦AB方程为$xx_0=2(y+y_0)$，两个式子联立得$x_0(x-2)-2y+4=0$，可知AB恒过定点$(2,2)$，本题很快可以解决.

例2：过抛物线外一点M作抛物线的两条切线，两切点的连线段称为点M对应的切点弦，已知抛物线为$x^2=4y$，点P，Q在直线l：$y=-1$上，过P，Q两点对应的切点弦分别是AB和CD.

(1)当P点横坐标等于2时，求切点弦AB所在的直线方程.

(2)当P点在直线l上运动时，直线AB是否经过某一个定点，若有，请求出定点坐标；如果没有，请说明理由.

(3)当$AB\perp CD$时，点P，Q在什么位置时，$|PQ|$取得最小值？

通过以上结论不难得出

解：(1)$P(2,-1)$时直线AB方程为$2x=2(y-1)$.

(2)$P(t,-1)$时直线AB方程为$tx=2(y-1)$，恒过$(0,1)$.

(3)当$AB\perp CD$时，我们不妨设$P(x_1,-1)$，$Q(x_2,-1)$，

则$k_{AB}=\frac{x_1}{2}$，$k_{CD}=\frac{x_2}{2}$，有$\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}=-1$，故有$x_1x_2=-4$，$x_1$，$x_2$异号.

不妨设$x_1<0<x_2$，则$|PQ|=x_2-x_1=x_2+\frac{4}{x_2}\geqslant 4$，当且仅当$x_2=2$时等号成立.

不难发现结论对处理以上切点弦问题更方便快捷，下面我们对切点弦问题进行更深层次的探讨.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是抛物线$y^2=2px$上的两个点，过A，B作抛物线的两条切线l_1，l_2，设l_1和l_2的交点是$P(x_0,y_0)$，我们看一下P的横纵坐标和A，B的横纵坐标有什么关系.

易得$\begin{cases}l_1:yy_1=p(x+x_1),\\ l_2:yy_2=p(x+x_2),\end{cases}$两个式子联立可得$\begin{cases}x_0=\frac{y_1y_2}{2p},\\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\end{cases}$如抛物线$x^2=2py$，只需将上式中$x$，$y$的位置互换即可，也就是$\begin{cases}y_0=\frac{x_1x_2}{2p},\\ x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.\end{cases}$

我们得到以上关系有什么用？我们注意到$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是切点弦直线与抛物线相交得到的，进而我们可以用韦达定理求$|AB|$，而上式中我们得到的刚好是韦达定理.

例3：设抛物线C_1的方程为$x^2=4y$，点$M(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$在抛物线C_2：$x^2=-y$上，过M作抛物线C_1的切线，切点分别为A，B，圆N是以AB为直径的圆.

(1)若点M的坐标是$(2,-4)$，求此时圆N的半径长；

(2)当M在$x^2=-y$上运动时，求圆心N的轨迹方程.

解：(1)由以上结论我们不难得到$\begin{cases}-4=\frac{x_1x_2}{2\times 2},\\ 2=\frac{x_1+x_2}{2}.\end{cases}$进而有$\begin{cases}-16=x_1x_2,\\ 4=x_1+x_2.\end{cases}$而$AB$的斜率$k_{AB}=1$，

故$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{10}$，故$r=\frac{1}{2}|AB|=2\sqrt{10}$.

(2)由结论可知$\begin{cases}y_0=\frac{x_1x_2}{2\times 2},\\ x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.\end{cases}$设圆心$N(x,y)$，则有$\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{8}.\end{cases}$

M在C_2上故有$x_0^2=-y_0$，即$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=-\frac{x_1x_2}{4}$，其中$2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)$，

整理可得$x^2=\frac{2}{3}y(x\neq 0)$.

例4：已知抛物线C：$x^2=2py(p>0)$，过焦点F的直线l与抛物线C相交于A，B两点，且当直线l倾斜角是45°时，与抛物线相交所得弦长为8.

(1)求抛物线C的方程.

(2)若过A，B分别作抛物线C的切线l_1和l_2，两条切线相交于点P，点P关于AB的对称点为Q，判断四边形$PAQB$是否存在外接圆，如果存在，求出外接圆面积的最小值；如果不存在，说明理由.

解：(1)由题意可知$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，设直线方程为$y=x+\frac{p}{2}$，与抛物线的交点为$M(x_1,y_1)$和$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2=2py,\\ y=x+\frac{p}{2}.\end{cases}$得：$y^2-3py+\frac{p^2}{4}=0$，所以$y_1+y_2=3p$，$|MN|=y_1+y_2+p=4p=8$，$p=2$，

故抛物线为$x^2=4y$.

(3)过$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$作切线l_1和l_2，由结论可设$P(x_0,y_0)$，

进而有$\begin{cases}y_0=\frac{x_1x_2}{2p},\\ x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.\end{cases}$通过观察我们可以知道$P$的横坐标刚好和$AB$的中点坐标一样，我们不妨设$AB$的中点坐标为$T\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，则$PT=\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1x_2}{2p}$.

由抛物线的性质可以知道$x_1x_2=-p^2$，故$PT=\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1x_2}{2p}=\frac{y_1+y_2+p}{2}=\frac{1}{2}AB$.

由此我们可以知道P是在以AB为直径的圆上，$r=\frac{1}{2}AB$，

所以只需求AB即可，$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1.\end{cases}$联立可得$x^2-4kx-4=0$，其中$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4(1+k^2)$，

则圆的面积取最小时只需AB取到最小即可，当$k=0$时，$AB=4$，圆的最小面积为4π.

圆锥曲线的结论有很多，笔者也是从高考和近几次重庆名校模拟题中发现可以用如上文中所提到的方法来处理这一类问题. 笔者把这一类问题统称为抛物线的切点弦问题，如果掌握了可以很快地找到解决问题的根源，如果教学时间充足，各位老师不妨尝试一下.