

函数与导数热点问题

◆ 三年真题考情

核心热点	真题印证	核心素养
利用导数研究函数的性质	2020 全国 II, 21; 2019 全国 III, 20; 2018 全国 I, 21; 2018 全国 II, 21	数学运算、逻辑推理
利用导数研究函数的零点	2020 全国 I, 20; 2020 全国 III, 20(2); 2019 全国 II, 20	数学运算、直观想象
导数在不等式中的应用	2020 山东, 21; 2020 天津, 20; 2019 全国 I, 20; 2018 全国 III, 21	数学运算、逻辑推理

◆ 教材链接高考

导数在不等式中的应用

教材探究

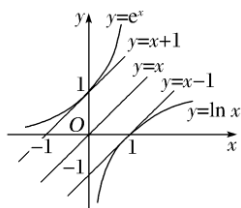
(选修 2-2P59 第 13 题)

1. 求证: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x > \sin x$.

2. 利用函数的单调性证明下列不等式, 并通过函数图象直观验证.

(1) $e^x > 1 + x (x \neq 0)$;(2) $\ln x < x < e^x (x > 0)$.[试题评析] 1. 设 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $\therefore f(x) > f(0) = 0$. $\therefore x > \sin x$.

2. 两题从本质上看是一致的, 第(2)问可以看作第(1)问的推论. 在第(1)问中, 用“ $\ln x$ ”替换“ x ”, 立刻得到 $x > 1 + \ln x (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$, 进而得到一组重要的不等式链: $e^x > x + 1 > x - 1 > \ln x (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$.



【教材拓展】已知函数 $f(x)=x-\ln x-\frac{e^x}{x}$.

(1)求 $f(x)$ 的最大值;

(2)试证明 $1+x^3+\frac{e^x}{x} \geq 3x-f(x)$.

(1)解 $f(x)=x-\ln x-\frac{e^x}{x}$,

定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x-e^x)}{x^2},$$

由 $e^x \geq x+1 > x$,

得 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1-e$.

(2)证明 要证 $1+x^3+\frac{e^x}{x} \geq 3x-f(x)$,

即证 $x^3-2x+1 \geq \ln x$,

考虑到 $x>0$ 时, $x-1 \geq \ln x$ (当且仅当 $x=1$ 时, 取等号).

欲证 $x^3-2x+1 \geq \ln x$, 只需证 $x^3-2x+1 \geq x-1$.

也就是证明 $x^3-3x+2 \geq 0$. (*)

设 $\varphi(x)=x^3-3x+2(x>0)$, 则 $\varphi'(x)=3x^2-3$,

令 $\varphi'(x)=0$, 得 $x=1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x)<0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x)>0$.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $\varphi(x)$ 取到最小值 $\varphi(1)=0$.

故(*)式成立, 从而 $1+x^3+\frac{e^x}{x} \geq 3x-f(x)$ 成立.

利用不等式 $e^x \geq x+1$ 进行放缩, 从而判断出 $x-e^x$ 的正负.

利用 $x-1 \geq \ln x (x>0)$ 进行放缩, 将问题转化为较为初等的函数问题.

探究提高 1. 本题涉及 $x, e^x, \ln x$ 组合型函数问题, 求解的关键在于通过等价变形或合理拆分, 得到熟悉的基本初等函数, 然后利用函数的图象和性质求解.

2.在(1)中,利用 $e^x \geq x+1 > x$, 在(2)中活用 $x-1 \geq \ln x$ 进行合理的放缩, 这样大大减少运算量, 降低思维难度.

【链接高考】 (2017 全国 III 卷改编) 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的值;

(2)证明: 对于任意正整数 n , $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < e$.

(1)解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

①若 $a \leq 0$, 因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + a\ln 2 < 0$, 所以不满足题意.

②若 $a > 0$, 由 $f(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$ 知,

当 $x \in (0, a)$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增,

故 $x=a$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的唯一最小值点.

因为 $f(1)=0$, 所以当且仅当 $a=1$ 时, $f(x) \geq 0$, 故 $a=1$.

(2)证明 由(1)知当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $x-1-\ln x > 0$.

令 $x=1+\frac{1}{2^n}$, 得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2^n}$.

从而 $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$.

故 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < e$.

◆◆ 教你如何审题

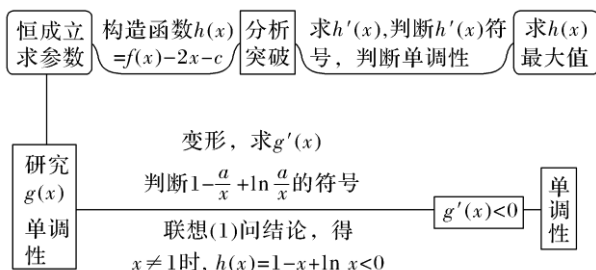
利用导数研究函数的性质

【例题】 (2020 全国 II 卷) 已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.

(1)若 $f(x) \leq 2x+c$, 求实数 c 的取值范围;

(2)设 $a>0$, 讨论函数 $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

审题路线



[自主解答]

解 设 $h(x) = f(x) - 2x - c$, 则 $h(x) = 2\ln x - 2x + 1 - c$,

其定义域为 $(0, +\infty)$, $h'(x) = \frac{2}{x} - 2$.

(1) 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减.

从而当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得最大值, 最大值为 $h(1) = -1 - c$.

故当且仅当 $-1 - c \leq 0$, 即 $c \geq -1$ 时, $f(x) \leq 2x + c$.

所以 c 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

$$(2) g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2(\ln x - \ln a)}{x - a}, \quad x \in (0, a) \cup (a, +\infty).$$

$$g'(x) = \frac{2\left(\frac{x-a}{x} + \ln a - \ln x\right)}{(x-a)^2} = \frac{2\left(1 - \frac{a}{x} + \ln \frac{a}{x}\right)}{(x-a)^2}.$$

取 $c = -1$ 得 $h(x) = 2\ln x - 2x + 2$, $h(1) = 0$,

则由(1)知, 当 $x \neq 1$ 时, $h(x) < 0$, 即 $1 - x + \ln x < 0$.

故当 $x \in (0, a) \cup (a, +\infty)$ 时, $1 - \frac{a}{x} + \ln \frac{a}{x} < 0$,

从而 $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$, $(a, +\infty)$ 单调递减.

探究提高 1. 利用导数研究函数的性质是历年高考的重点、热点, 涉及的主要内容: (1) 讨论函数的单调性; (2) 求函数的极(最)值、极(最)值点; (3) 利用性质研究方程(不等式). 考查数学运算、逻辑推理、直观想象等数学核心素养.

2. 本题主要考查函数的单调性与最值, 不等式恒成立求参数, 解题的关键是讨论函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性, 准确进行数学运算是求解的前提条件. 另外题目与教材 2-2P32 结论 “ $x - 1 \geq \ln x$ ” 有效链接, 因此在复习备考中要重视教材深化拓展.

【尝试训练】 (2020 北京卷) 已知函数 $f(x) = 12 - x^2$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;

(2)设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

解 (1) $f'(x) = -2x$,

令 $f'(x) = -2$, 得 $-2x = -2$, 解得 $x = 1$, $f(1) = 12 - 1 = 11$, 所以切点为 $(1, 11)$, 切线方程为 $y - 11 = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 13 = 0$.

(2)二次函数 $f(x) = 12 - x^2$ 为偶函数, 其图象是开口向下的抛物线, 且关于 y 轴对称, 故只需考虑一侧的情形即可.

不妨考虑 $x > 0$ 时的情形.

设切点为 $(t, 12 - t^2)$, $t > 0$, 可求得切线方程为

$y - (12 - t^2) = -2t(x - t)$, 得 $y = -2tx + t^2 + 12$,

所以切线与坐标轴的交点分别为 $A(0, t^2 + 12)$,

$B\left(\frac{t^2 + 12}{2t}, 0\right)$,

$$S(t) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + 12}{2t} (t^2 + 12) = \frac{t^4 + 24t^2 + 144}{4t},$$

$$S'(t) = \frac{3t^4 + 24t^2 - 144}{4t^2} = \frac{3(t^2 + 12)(t^2 - 4)}{4t^2},$$

t , $S'(t)$, $S(t)$ 的变化情况如下表所示:

t	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$		极小值	

故当 $t = 2$ 时, $S(t)$ 取得最小值, 为 $S(2) = 32$.

◆ 满分答题示范

利用导数研究函数的零点问题

【例题】(12分)(2019 全国 II 卷)已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2)设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

[规范解答]

(1)解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 单调递增.2 分

因为 $f(e) = 1 - \frac{e+1}{e-1} < 0$, $f(e^2) = 2 - \frac{e^2+1}{e^2-1} = \frac{e^2-3}{e^2-1} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一零点 $x_1 (e < x_1 < e^2)$,

即 $f(x_1) = 0$4 分

又 $0 < \frac{1}{x_1} < 1$, $f\left(\frac{1}{x_1}\right) = -\ln x_1 + \frac{x_1+1}{x_1-1} = -f(x_1) = 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$.

综上, $f(x)$ 有且仅有两个零点.7 分

(2)证明 因为 $\frac{1}{x_0} = e^{-\ln x_0}$,

所以点 $B\left(-\ln x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y = e^x$ 上.8 分

由题设知 $f(x_0) = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{x_0+1}{x_0-1}$,

故直线 AB 的斜率 $k = \frac{\frac{1}{x_0} - \ln x_0}{-\ln x_0 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0} - \frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1} - x_0} = \frac{1}{x_0}$10 分

又曲线 $y = e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0, \frac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\frac{1}{x_0}$, 曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$

处切线的斜率也是 $\frac{1}{x_0}$,

所以曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

.....12 分

 高考状元满分心得

①得步骤分: 抓住得分点的步骤, “步步为赢”, 求得满分. 如第(1)问中, 求导正确, 判断单调性, 利用零点存在定理, 确定零点个数; 第(2)问中, 由 $f(x_0) = 0$ 定切点 B , 求切线的斜率.

②得关键分：解题过程不可忽视关键点，有则给分，无则没分，如第(1)问中，求出 $f(x)$ 的定义域， $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调性的判断；第(2)问中，找关系 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ ，判定两曲线在点 B 处切线的斜率相等。

③得计算分：解题过程中计算准确是得满分的根本保证。如第(1)问中，求导 $f'(x)$ 准确，否则全盘皆输，判定 $f\left(\frac{1}{x_1}\right) = -f(x_1) = 0$ 。第(2)问中，正确计算 k_{AB} 等，否则不得分。

构建模板

第一步……求 $f(x)$ 的定义域 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, 计算 $f'(x)$

↓

第二步……利用零点存在定理及单调性, 判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一零点 x_1

↓

第三步……证明 $f\left(\frac{1}{x_1}\right)=0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$

↓

第四步……由第(1)问, 求直线 AB 的斜率 $k=\frac{1}{x_0}$

↓

第五步……求 $y=e^x$ 在点 B 处, $y=\ln x$ 在点 A 处切线斜率 $k=\frac{1}{x_0}$

↓

第六步……检验反思, 规范解题步骤

【规范训练】(2020 全国 I 卷) 已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-x-2$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(2) $f'(x)=e^x-a$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 至多存在一个零点, 不合题意.

② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x)=0$, 可得 $x=\ln a$.

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

(i) 若 $0 < a \leq \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至多存在一个零点, 不合题

意.

(ii II)若 $a > \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) < 0$.

因为 $f(-2) = e^{-2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 存在唯一零点.

由(1)知, 当 $x > 2$ 时, $e^x - x - 2 > 0$.

所以当 $x > 4$ 且 $x > 2\ln(2a)$ 时, $f(x) = e_2^{\frac{x}{2}} e_2^{\frac{x}{2}} - a(x+2) > e^{\ln(2a)} \left(\frac{x}{2} + 2\right) - a(x+2) = 2a > 0$.

故函数 $f(x)$ 在区间 $(\ln a, +\infty)$ 存在唯一零点.

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有两个零点.

综上可知, 若 $f(x)$ 有两个零点,

实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

◆ 热点跟踪训练

1.(2020 天津卷节选)已知函数 $f(x) = x^3 + 6\ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值.

解 (1) $f(x) = x^3 + 6\ln x$, 故 $f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x}$.

可得 $f(1) = 1$, $f'(1) = 9$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 9(x - 1)$, 即 $9x - y - 8 = 0$.

(2)依题意, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6\ln x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

从而可得 $g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}$,

整理可得 $g'(x) = \frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$.

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$		极小值	

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$; $g(x)$ 的极小值为 $g(1)=1$, 无极大值.

2.(2021 镇江调研)设函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$ (a 为常数).

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)不等式 $f(x)\geq 1$ 在 $x\in(0, 1]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解 (1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2},$$

当 $a\leq 0$ 时, 又 $x>0$, $\therefore x-a>0$, $\therefore f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时, 若 $x>a$, 则 $f'(x)>0$, $\therefore f(x)$ 单调递增;

若 $0<x<a$, 则 $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$ 单调递减.

综上所述: 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上是减函数, 在区间 $(a, +\infty)$ 上是增函数.

(2) $f(x)\geq 1\Leftrightarrow \frac{a}{x}+\ln x\geq 1\Leftrightarrow \frac{a}{x}\geq -\ln x+1\Leftrightarrow a\geq -x\ln x+x$ 对任意 $x\in(0, 1]$ 恒成立.

令 $g(x)=-x\ln x+x$, $x\in(0, 1]$.

则 $g'(x)=-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}+1=-\ln x\geq 0$, $x\in(0, 1]$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, $\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$,

$\therefore a\geq 1$, 故 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

3.已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

(1)若 $a=1$, 证明: 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)\geq 1$;

(2)若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

(1)证明 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-x^2$, 则 $f'(x)=e^x-2x$.

令 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=e^x-2$.

令 $g'(x)=0$, 解得 $x=\ln 2$.

当 $x\in(0, \ln 2)$ 时, $g'(x)<0$;

当 $x\in(\ln 2, +\infty)$ 时, $g'(x)>0$.

$\therefore$ 当 $x\geq 0$ 时, $g(x)\geq g(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) \geq f(0) = 1$.

(2)解 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 即方程 $e^x - ax^2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个解,

由 $a = \frac{e^x}{x^2}$, 令 $\varphi(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$,

$\varphi'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 解得 $x = 2$.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $\varphi'(x) < 0$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 其中 $x \rightarrow 0$ 时, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$,

且 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(2) = \frac{e^2}{4} \therefore a = \frac{e^2}{4}$.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点, 且 $x_2 > x_1$, 设 $t = f(x_1) - f(x_2) - (a-2)(x_1 - x_2)$, 试证明 $t > 0$.

(1)解 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

① 若 $a \leq 2$, 则 $f'(x) \leq 0$,

当且仅当 $a = 2$, $x = 1$ 时 $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

② 若 $a > 2$, 令 $f'(x) = 0$ 得,

$$x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ 或 } x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

当 $x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$, $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上单调递增.

(2)证明 由(1)知, $f(x)$ 存在两个极值点时, 当且仅当 $a>2$.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2-ax+1=0$,

所以 $x_1x_2=1$.

又因 $x_2>x_1>0$, 所以 $x_2>1$.

又 $t=f(x_1)-f(x_2)-(a-2)(x_1-x_2)$

$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-(x_1-x_2)+a(\ln x_1-\ln x_2)-(a-2)(x_1-x_2)$$

$$=a\left(\ln \frac{x_1}{x_2}-x_1+x_2\right)=-a\left(\frac{1}{x_2}+2\ln x_2-x_2\right).$$

设 $\varphi(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x, x>1$.

由第(1)问知, $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 且 $\varphi(1)=0$,

从而当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $\varphi(x)<0$.

所以 $\frac{1}{x_2}+2\ln x_2-x_2<0$, 故 $t>0$.

5.已知函数 $f(x)=\ln x+ax+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切, 求证: 对于任意互不相等的正实数 x_1, x_2 , 都

$$\text{有 } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

(1)解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{ax+1}{x}$.

当 $a\geq 0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时, 由 $f'(x)=0$, 得 $x=-\frac{1}{a}$.

若 $x\in\left(0, -\frac{1}{a}\right)$, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

若 $x\in\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述: 当 $a\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2)证明 由(1)知, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不满足条件.

所以 $a < 0$, 此时 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\ln(-a)$,

由已知得 $-\ln(-a) = 0$, 故 $a = -1$, 此时 $f(x) = \ln x - x + 1$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$,

则 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 等价于 $\ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} + x_2 - x_1$,

即证: $\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} < x_2 - x_1$.

令 $g(x) = \ln x - x + \frac{1}{x} (x > 1)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x^2} < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

所以 $g(x) < g(1) = 0 < x_2 - x_1$.

所以对于任意互不相等的正实数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 成立.