

午间训练 13

一、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

1. 已知 $0 < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b < 1$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $1 > a^2 > b^2 > \frac{1}{4}$ B. $2 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 1$ C. $\frac{a}{b-1} > \frac{b}{a-1}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}} > e^{-b} > \frac{1}{e}$

2. 将函数 $f(x) = 2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再将得到的图象向左平移 π 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的有（ ）

A. $g(x)$ 为奇函数 B. $g(x)$ 的周期为 4π

C. $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $g(x+\pi) = g(\pi-x)$

D. $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且是小值为 $-\sqrt{3}$

3. 提丢斯-波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则，它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯发现的，后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律，即数列 $\{a_n\}$ ：0.4, 0.7, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6, ...，表示的是太阳系第 n 颗行星与太阳的平均距离(以天文单位 A.U. 为单位)。现将数列 $\{a_n\}$ 的各项乘以 10 后再减 4，得到数列 $\{b_n\}$ ，可以发现数列 $\{b_n\}$ 从第 3 项起，每项是前一项的 2 倍，则下列说法正确的是（ ）

A. 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \times 2^{n-2}$ B. 数列 $\{a_n\}$ 的第 2021 项为 $0.3 \times 2^{2020} + 0.4$

C. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 0.4n + 0.3 \times 2^{n-1} - 0.3$ D. 数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 3(n-1) \cdot 2^{n-1}$

4. 在一张纸上有一圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 与点 $M(m, 0)$ ($m \neq -2$)，折叠纸片，使圆 C 上某一点 M' 好与点 M 重合，这样的每次折法都会留下一条直线折痕 PQ ，设折痕 PQ 与直线 MC 的交点为 T ，则下列说法正确的是（ ）

A. 当 $-2-r < m < -2+r$ 时，点 T 的轨迹为椭圆

B. 当 $r=1, m=2$ 时，点 T 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

C. 当 $m=2, 1 \leq r \leq 2$ 时，点 T 的轨迹对应曲线的离心率取值范围为 $[2, 4]$

D. 当 $r=2\sqrt{2}, m=2$ 时，在 T 的轨迹上任取一点 S ，过 S 作直线 $y=x$ 的垂线，垂足为 N ，则 $\triangle SON$ (O 为坐标原点) 的面积为定值