

高一数学期末复习综合练习 3

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 成绩_____

一、单项选择题

1. 四个函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^x$, $y = x^2$, 其中说法正确的是()
A. 定义域都是 R ; B. 图象都不在 x 轴下方; C. 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数; D. 图象都过点 $(0,1)$
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq 0, \\ 3a - x^2, & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 是 R 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是()
A. $(0, \frac{1}{3}]$; B. $(0,1)$; C. $[\frac{1}{3}, 1]$; D. $(0, \frac{1}{3})$
3. 在平面直角坐标系中, 若角 α 的终边经过点 $P(\sin \frac{4\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3})$, 则 $\cos(\pi + \alpha) =$ ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 已知函数 $f(x) = 2^x - a$, $g(x) = 1 + x^3$, 若存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, -1)$; B. $[0,1]$; C. $[-1,1]$; D. $[-1,0]$
5. 若正数 a, b 满足 $4a + 3b - 1 = 0$, 则 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为()
A. $3 + 2\sqrt{2}$ B. $1 + 2\sqrt{2}$ C. $2 + 3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$
6. 函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数, 且 $f(\sin \omega) + f(-\cos \omega) > f(-\sin \omega) + f(\cos \omega)$, 其中 ω 是锐角, 并且使得 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是()
A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{5}{4}, \frac{\pi}{2})$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$

二、多项选择题

7. 下列函数中, 既是偶函数又是区间 $(0, +\infty)$ 上增函数的有()
A. $y = 2^{-|x|}$ B. $y = x^{\frac{2}{3}}$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^3$
8. 已知 $a > b$, $ab \neq 0$, 则下列不等式中, 恒成立的有 ()
A. $a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}}$ B. $(\frac{2}{3})^a < (\frac{2}{3})^b$ C. $a^{\frac{1}{5}} > b^{\frac{1}{5}}$ D. $2^{a-1} < 2^{b-1}$
9. 下面命题:
A. 幂函数图象不过第四象限; B. $y = x^0$ 图象是一条直线;
C. 若函数 $y = 2^x$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq 1\}$;
D. 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq \frac{1}{2}\}$;
E. 若函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 则它的定义域一定是 $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$.
其中不正确命题是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$, 且 $\forall x \in [0, \pi]$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 满足 $f(x_3) = 0$ 的实数 x_3 有且只有 3 个, 下述正确结论是()
- A. 满足题目条件的实数 x_1 有且只有 1 个; B. 满足题目条件的实数 x_2 有且只有 1 个;
C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增; D. ω 的取值范围是 $\left[\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right)$.

三、填空题

11. 若幂函数 $y = (k-2)x^{m-1}$ ($k, m \in R$) 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, 则 $k+m =$ _____.
12. 若不等式 $x^2 < |x-1| + a$ 的解集是区间 $(-3, 3)$ 的子集, 则实数 a 的范围为 _____.
13. 不等式 $x^2 + (2m-2tm-2)x - 9t + 16 > 0$ 对任意 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 及任意 $t \in [0, 2]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.
14. 从秦朝统一全国币制到清朝末年, 圆形方孔铜钱(简称“孔方兄”)是我国使用时间长达两千多年的货币. 如图 1, 这是一枚清朝同治年间的铜钱, 其边框是由大小不等的两同心圆围成的, 内嵌正方形孔的中心与同心圆圆心重合, 正方形外部, 圆框内部刻有四个字“同治重宝”. 某模具厂计划仿制这样的铜钱作为纪念品, 其小圆内部图纸设计如图 2 所示, 小圆直径 1 厘米, 内嵌一个大正方形孔, 四周是四个全等的小正方形(边长比孔的边长小), 每个正方形有两个顶点在圆周上, 另两个顶点在孔边上, 四个小正方形内用于刻铜钱上的字. 设 $\angle OAB = \theta$, 五个正方形的面积和为 S , 则面积 S 关于 θ 的函数表达式 _____ 且 $\tan\theta$ 的范围为 _____.



图 1

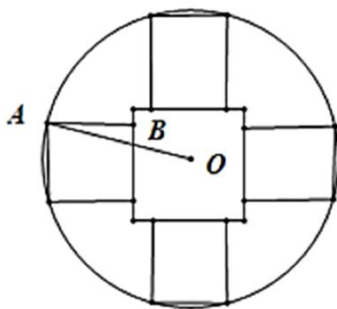


图 2

四、解答题

15. 已知条件 $p: A = \{x | 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$, 条件 $q: B = \{x | x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$. 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x) = mx^2 + (1 - 3m)x - 4, m \in R$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) > -1$.

(3) 当 $m < 0$ 时, 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 求实数 m 的取值范围.

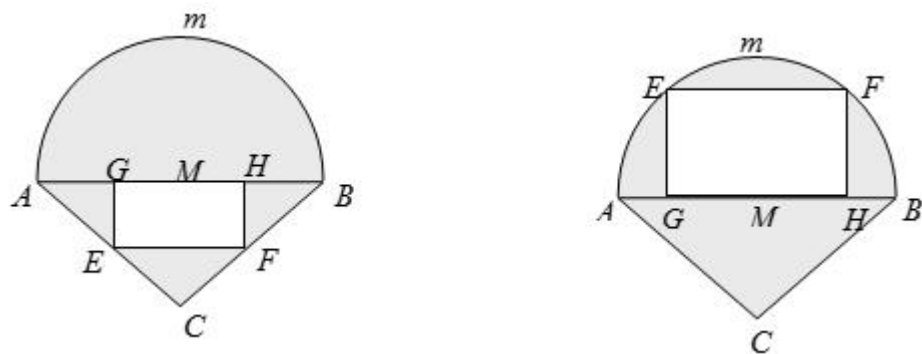
17. 在① $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, ② $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{18}, 0)$ 对称, ③ $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 若问题中的正实数 a 存在, 求出 a 的值; 若 a 不存在, 说明理由.

已知函数 $f(x) = 4\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + a (\omega \in \mathbf{N}^+)$ 的最小正周期不小于 $\frac{\pi}{3}$, 且 _____, 是否存在正实数 a , 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 上有最大值 3?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 如图所示的自动通风设施.该设施的下部是等腰直角三角形 ABC , 其中斜边 AB 是 2 米, 上部 AmB 是个半圆, 固定点 M 为 AB 的中点. EF 是由电脑控制可以上下滑动的伸缩横杆(横杆面积可以忽略不计), 且滑动过程中始终保持和 AB 平行.当 EF 位于 AB 下方和上方时, 通风窗的形状均为矩形 $EFHG$, 其中点 G, H 在 AB 上(阴影部分均不通风).

- (1) 设点 C 到 EF 之间的距离为 x 米, 试将通风窗的通风面积 S (平方米)表示成关于 x 的函数 $y = S(x)$;
- (2) 当点 C 到 EF 之间的距离为多少米时, 通风窗的通风面积 S 取得最大值, 并求出最大值.



2021-2022 学年度第一学期高一数学期末复习三

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 自我评价 _____

一、单项选择题(本大题共 6 小题)

1. 四个函数 $y = x^{\frac{1}{2}}, y = (\frac{1}{2})^x, y = 2^x, y = x^2$, 其中说法正确的是()

- A. 定义域都是 R ; B. 图象都不在 x 轴下方;
C. 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数; D. 图象都过点 $(0,1)$

解: A. 由题意可得, 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故选项错误; B. 图象都不在 x 轴下方, 故选项正确;
C. 函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 故选项错误; D. 函数 $y = x^2$ 的图象经过 $(0,0)$, 错误. 故选 B.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq 0, \\ 3a - x^2, & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 是 R 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(0, \frac{1}{3}]$; B. $(0,1)$; C. $[\frac{1}{3}, 1]$; D. $(0, \frac{1}{3})$

解: 当 $x \leq 0$ 时, 由 $f(x) = a^x$ 为减函数, 知 $0 < a < 1$; 当 $x > 0$ 时, 由 $f(x) = 3a - x^2$ 为减函数, 知 $a \in R$, 且要满足 $a^0 \geq 3a$, 解得 $a \leq \frac{1}{3}$. 综上可知, 实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}]$. 故选 A

3. 在平面直角坐标系中, 若角 α 的终边经过点 $P(\sin \frac{4\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3})$, 则 $\cos(\pi + \alpha) = ()$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解: 由题意可得, $P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, 故 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选: A.

4. 已知函数 $f(x) = 2^x - a$, $g(x) = 1 + x^3$, 若存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, -1)$; B. $[0,1]$; C. $[-1,1]$; D. $[-1,0]$

解: $\because$ 函数 $f(x) = 2^x - a$, 且函数单调递增, $\therefore x_1 \in [0,1]$ 时, $f(x_1) \in [1-a, 2-a]$, $\because g(x) = 1 + x^3$, 且函数单调递增, $\therefore x_2 \in [0,1]$ 时, $g(x_2) \in [1,2]$, $\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, $\therefore [1-a, 2-a] \cap [1,2] \neq \emptyset$, $\therefore 1-a \in [1,2]$ 或 $2-a \in [1,2]$, 解得 a 的取值范围是 $[-1,1]$. 故选 C.

5. 若正数 a, b 满足 $4a + 3b - 1 = 0$, 则 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为()

- A. $3 + 2\sqrt{2}$ B. $1 + 2\sqrt{2}$ C. $2 + 3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

解: 由题意, 设 $\begin{cases} m = 2a + b \\ n = a + b \end{cases}$, 解得 $a = m - n, b = 2n - m$, 其中 $m > 0, n > 0$, $\therefore 4a + 3b - 1 = 0$, $\therefore 4(m - n) + 3(2n - m) - 1 = 0$, 整理得 $m + 2n = 1$, 又由 $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})(m + 2n) = 3 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m = \sqrt{2}n$, 即 $m = \sqrt{2} - 1, n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, $\therefore \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$. 故选: A.

6. 函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数, 且 $f(\sin \omega) + f(-\cos \omega) > f(-\sin \omega) + f(\cos \omega)$, 其中 ω 是锐角, 并且使得 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是()

- A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{5}{4}, \frac{\pi}{2})$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$

解: 构造函数 $F(x) = f(x) - f(-x)$, 因为函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数, 所以 $F(x)$ 也是增函数, 而 $F(\sin \omega) > F(\cos \omega)$, 所以 $\sin \omega > \cos \omega$, 又 ω 是锐角, 那么 $\omega \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 以及根据周期 $\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{2} \geq \pi - \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega \leq 2$, 又因为 $(\omega \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \omega \cdot \pi + \frac{\pi}{4}) \subseteq (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, 解得 $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$, 综上可得 $\frac{\pi}{4} < \omega \leq \frac{5}{4}$. 故选 A.

二、多项选择题(本大题共 4 小题)

7. 下列函数中, 既是偶函数又是区间 $(0, +\infty)$ 上增函数的有()

- A. $y = 2^{-|x|}$ B. $y = x^{\frac{2}{3}}$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^3$

解: A. 函数 $y = 2^{-|x|}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意; B. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意; C. 函数 $y = x^2 - 1$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意; D. 函数 $y = x^3$

为奇函数, 不符合题意. 故选 BC.

8. 已知 $a > b$, $ab \neq 0$, 则下列不等式中, 恒成立的有 ()

- A. $a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}}$ B. $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$ C. $a^{\frac{1}{5}} > b^{\frac{1}{5}}$ D. $2^{a-1} < 2^{b-1}$

解: 对于 A、当 $a = 1, b = -1$ 时, 显然错误; 对于 B、因为函数 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 R 上递减, 由 $a > b$, 得 $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$, 故 B 正确; 对于 C、因为函数 $y = x^{\frac{1}{5}}$ 在 R 上递增, 由 $a > b$, 得 $a^{\frac{1}{5}} > b^{\frac{1}{5}}$, 故 C 正确; 对于 D、因为函数 $y = 2^x$ 在 R 上递增, 由 $a > b$, 得 $2^{a-1} > 2^{b-1}$, 故 D 错误, 故选 BC.

9. 下面命题:

- A. 幂函数图象不过第四象限; B. $y = x^0$ 图象是一条直线;
C. 若函数 $y = 2^x$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq 1\}$;
D. 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq \frac{1}{2}\}$;
E. 若函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 则它的定义域一定是 $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$.

其中不正确命题是_____.

解: A $\because$ 幂函数的图像不过第四象限, $\therefore$ A 正确; B $\because y = x^0$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $\therefore$ 其图像是直线 $y = 1$ 去掉点 $(0,1)$ 后剩下的部分, $\therefore$ B 错误; C 若函数 $y = 2^x$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$, 则它的值域是 $\{y|0 < y \leq 1\}$, $\therefore$ C 错误; D 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$, 则它的值域是 $\{y|0 < y < \frac{1}{2}\}$, $\therefore$ D 错误; E 若函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 则它的定义域也可能是 $\{x|0 \leq x \leq 2\}$, $\therefore$ E 错误. 故答案为 B C D E

10. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$, 且 $\forall x \in [0, \pi]$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 满足 $f(x_3) = 0$ 的实数 x_3 有且只有 3 个, 下述正确结论是 () A C D

- A. 满足题目条件的实数 x_1 有且只有 1 个; B. 满足题目条件的实数 x_2 有且只有 1 个;
C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增; D. ω 的取值范围是 $\left[\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right)$.

解: 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$, 满足 $f(x_3) = 0$ 的实数 x_3 有且只有 3 个, 由 $\cos\left(\omega x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$, 可得 $\omega x - \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, 由 $k = 0$ 可得 $x = \frac{7\pi}{6\omega}$; $k = -1$ 可得 $x = \frac{\pi}{6\omega}$; $k = 1$ 可得 $x = \frac{13\pi}{6\omega}$; $k = 2$ 可得 $x = \frac{19\pi}{6\omega}$, 由 $x_3 \in [0, \pi]$, 可得 $\frac{19\pi}{6\omega} > \pi$, 且 $\frac{13\pi}{6\omega} \leq \pi$, 解得 $\frac{13}{6} \leq \omega < \frac{19}{6}$; 故 D 正确; 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{10}\right)$, 可得 $\omega x - \frac{2\pi}{3} \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{10} - \frac{2\pi}{3}\right)$, 由 $\frac{13}{6} \leq \omega < \frac{19}{6}$, 可得 $\frac{\omega\pi}{10} - \frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{9\pi}{20}, -\frac{7\pi}{20}\right)$, 由 $y = \cos x$ 在 $(-\pi, 0)$ 递增, 可得 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增, 故 C 正确; 由 $\forall x \in [0, \pi]$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 可得 $f(x)$ 的最大值为 $f(x_2)$, 最小值为 $f(x_1)$, 由 $y = \cos x$ 的图象可得 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的最大值可能有两个或者一个, 最小值只有一个, 故 A 正确, B 错误. 其中正确的为 A C D

三、填空题(本大题共 4 小题)

11. 若幂函数 $y = (k-2)x^{m-1}$ ($k, m \in R$) 的图象过点 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, 则 $k+m =$ _____.

解: 函数为幂函数, 则 $k-2 = 1$, 得 $k = 3$, 则幂函数为 $y = f(x) = x^{m-1}$, $\therefore$ 函数过点 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 4$, 即 $2^{1-m} = 4$, 得 $1-m = 2$, 得 $m = 1-2 = -1$, 则 $k+m = 3-1 = 2$.

12. 若不等式 $x^2 < |x-1| + a$ 的解集是区间 $(-3, 3)$ 的子集, 则实数 a 的范围为_____.

解: 设 $f(x) = x^2 - |x-1| - a$, 则 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 - a, & x \geq 1 \\ x^2 + x - 1 - a, & x < 1 \end{cases}$, 不等式 $x^2 < |x-1| + a$ 的解集是区间 $(-3, 3)$ 的子集, 则等价于 $\begin{cases} f(3) \geq 0 \\ f(-3) \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 9-2-a \geq 0 \\ 9-4-a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $a \leq 5$. 故答案为 $(-\infty, 5]$.

13. 不等式 $x^2 + (2m-2tm-2)x - 9t + 16 > 0$ 对任意 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 及任意 $t \in [0, 2]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

解: 由题意知, 不等式 $x^2 + (2m-2tm-2)x - 9t + 16 > 0$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 及任意 $t \in [0, 2]$ 恒成立, 构造函数 $h(t) = x^2 + (2m-2tm-2)x - 9t + 16$, 由题意可得 $\begin{cases} h(0) = x^2 + (2m-2)x + 16 > 0 \\ h(2) = x^2 - (2m+2)x - 2 > 0 \end{cases}$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 恒成立, 所以 $\begin{cases} 2-2m < x + \frac{16}{x} \\ 2m+2 < x - \frac{2}{x} \end{cases}$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 恒成立, 对于函数 $y = x + \frac{16}{x}$, 当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$

时, 由基本不等式得 $y \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8$, 当且仅当 $x = 4$ 时, 等号成立, 所以 $y = x + \frac{16}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$ 上的

最小值为 8, $\therefore 2 - 2m < 8$, 得 $m > -3$; 由于函数 $y = x - \frac{2}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 8]$ 上单调递增, 则当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = x - \frac{2}{x}$ 取得最小值 $-\frac{7}{2}$, $\therefore 2m + 2 < -\frac{7}{2}$, 解得 $m < -\frac{11}{4}$. 综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-3, -\frac{11}{4})$.

14. 从秦朝统一全国币制到清朝末年, 圆形方孔铜钱(简称“孔方兄”)是我国使用时间长达两千多年的货币. 如图 1, 这是一枚清朝同治年间的铜钱, 其边框是由大小不等的两同心圆围成的, 内嵌正方形孔的中心与同心圆圆心重合, 正方形外部, 圆框内部刻有四个字“同治重宝”. 某模具厂计划仿制这样的铜钱作为纪念品, 其小圆内部图纸设计如图 2 所示, 小圆直径 1 厘米, 内嵌一个大正方形孔, 四周是四个全等的小正方形(边长比孔的边长小), 每个正方形有两个顶点在圆周上, 另两个顶点在孔边上, 四个小正方形内用于刻铜钱上的字. 设 $\angle OAB = \theta$, 五个正方形的面积和为 S , 则面积 S 关于 θ 的函数表达式为 且 $\tan\theta$ 的范围为 .

解: 过点 O 分别作小正方形边, 大正方形边的垂线, 垂足分别为 E, F , 因为内嵌一个大正方形孔的中心与同心圆圆心重合, 所以点 E, F 分别为小正方形和大正方形边的中点. 所以小正方形的边长为 $(\frac{1}{2}\sin\theta) \times 2 = \sin\theta$, 大正方形的边长为 $(\frac{1}{2}\cos\theta - \sin\theta) \times 2 = \cos\theta - 2\sin\theta$, 所以五个正方形的面积和为 $S = 4\sin^2\theta + (\cos\theta - 2\sin\theta)^2 = 8\sin^2\theta + \cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta$, 因为小



图 1

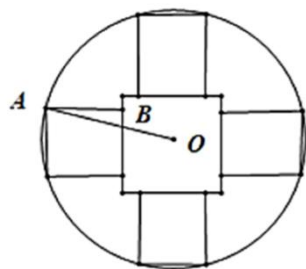


图 2

正方形边长小于内嵌一个大正方形的边长, 所以 $\sin\theta < \cos\theta - 2\sin\theta$, 所以 $\tan\theta < \frac{1}{3}$, 故面积 S 关于 θ 的函数表达式为 $S = 8\sin^2\theta + \cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta$, $\tan\theta$ 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3})$.

四、解答题(本大题共 4 小题)

15. 已知条件 $p: A = \{x | 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$, 条件 $q: B = \{x | x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$. 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

解: $A = \{x | 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$, $B = \{x | (x-2)[x-(3a+1)] \leq 0\}$. 方程 $(x-2)[x-(3a+1)] = 0$ 的两个根为 $x = 2$ 或 $x = 3a+1$, 若 $3a+1 = 2$, 解得 $a = \frac{1}{3}$, ①当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x | 2 \leq x \leq 3a+1\}$; ②当 $a < \frac{1}{3}$

时, $B = \{x | 3a+1 \leq x \leq 2\}$. $\because p$ 是 q 的充分条件, $\therefore A \subseteq B$, 于是有
$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{3} \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \\ 2a \geq 2 \end{cases}$$
 解得 $1 \leq a \leq 3$.

或 $\begin{cases} a < \frac{1}{3} \\ a^2 + 1 \leq 2 \\ 2a \geq 3a + 1 \end{cases}$, 解得 $a = -1$. 综上 a 的取值范围是 $\{a | 1 \leq a \leq 3 \text{ 或 } a = -1\}$.

16. 已知函数 $f(x) = mx^2 + (1-3m)x - 4$, $m \in R$.

(1)当 $m = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值; (2)解关于 x 的不等式 $f(x) > -1$.

(3)当 $m < 0$ 时, 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 求实数 m 的取值范围.

解: (1)当 $m = 1$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - 2x - 4$ 的图象为抛物线, 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 所以该函数在 $(-2, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, 2)$ 上是增函数, 又 $f(-2) = 4$, $f(1) = -5$, $f(2) = -4$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值分别为 4 和 -5.

(2)不等式 $f(x) > -1$, 即 $mx^2 + (1-3m)x - 3 > 0$, 当 $m = 0$ 时, 解得 $x > 3$; 当 $m \neq 0$ 时, $(x-3)(mx+1) = 0$ 的两根为 3 和 $-\frac{1}{m}$; 当 $m > 0$ 时, $-\frac{1}{m} < 3$, 不等式的解集为 $\{x | x < -\frac{1}{m} \text{ 或 } x > 3\}$; 当 $m < 0$ 时, $3 - (-\frac{1}{m}) = \frac{3m+1}{m}$; 所以, 当 $m < -\frac{1}{3}$ 时, $-\frac{1}{m} < 3$, 不等式的解集为 $\{x | -\frac{1}{m} < x < 3\}$; 当 $m = -\frac{1}{3}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$ 当 $0 > m > -\frac{1}{3}$ 时, $3 < -\frac{1}{m}$, 不等式的解集为 $\{x | 3 < x < -\frac{1}{m}\}$; 综上, 当 $m > 0$ 时, 解集为 $\{x | x < -\frac{1}{m} \text{ 或 } x > 3\}$; 当 $m = 0$ 时, 解集为 $\{x | x > 3\}$; 当 $m < -\frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\{x | -\frac{1}{m} < x < 3\}$; 当 $m = -\frac{1}{3}$, 解集为 $\emptyset$; 当 $0 > m > -\frac{1}{3}$ 时, $3 < -\frac{1}{m}$, 不等式的解集为 $\{x | 3 < x < -\frac{1}{m}\}$;

(3)因为 $m < 0$, 所以 $f(x) = mx^2 + (1-3m)x - 4$ 是开口向下的抛物线, 对称轴为 $x = -\frac{1-3m}{2m} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2m} > 1$, 存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 则 $(1-3m)^2 + 16m > 0$, 即 $9m^2 + 10m + 1 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > -\frac{1}{9}$, 综上, m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{9}, 0)$.

17. 在① $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, ② $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{18}, 0)$ 对称, ③ $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 若问题中的正实数 a 存在, 求出 a 的值; 若 a 不存

在, 说明理由.

已知函数 $f(x) = 4\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + a (\omega \in \mathbf{N}^*)$ 的最小正周期不小于 $\frac{\pi}{3}$, 且 _____, 是否存在正实数 a ,

使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 上有最大值 3? 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

解: 由于函数 $f(x)$ 的最小正周期不小于 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{3}$, 所以 $1 \leq \omega \leq 6$, $\omega \in \mathbf{N}^*$, 若选择①, 即 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, 有 $\frac{5\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = \frac{6}{5}k + \frac{2}{5} (k \in \mathbf{Z})$, 由于 $1 \leq \omega \leq 6$, $\omega \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k = 3$, $\omega = 4$, 此时, $f(x) = 4\sin(4x + \frac{\pi}{6}) + a$, 由 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 得 $4x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, 因此当 $4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $4 + a$, 令 $4 + a = 3$, 解得 $a = -1$, 不符合题意. 故不存在正实数 a , 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 上有最大值 3. 若选择②, 即 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{18}, 0)$ 对称, 则有 $\frac{5\pi}{18}\omega + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = \frac{18}{5}k - \frac{3}{5} (k \in \mathbf{Z})$, 由于 $1 \leq \omega \leq 6$, $\omega \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k = 1$, $\omega = 3$. 此时, $f(x) = 4\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + a$. 由 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 得 $3x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$, 因此当 $3x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $4\sin \frac{5\pi}{12} + a = \sqrt{6} + \sqrt{2} + a$, 令 $\sqrt{6} + \sqrt{2} + a = 3$, 解得 $a = 3 - \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 不符合题意. 故不存在正实数 a , 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 上有最大值 3; 若选择③, 即 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 则有

$$\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \geq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbf{Z}), \text{解得} \begin{cases} \omega \leq -8k + \frac{8}{3}, \\ \omega \leq 8k + \frac{4}{3}, \end{cases} (k \in \mathbf{Z}), \text{由于 } 1 \leq \omega \leq 6, \omega \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } k = 0,$$

$\omega = 1$. 此时, $f(x) = 4\sin(x + \frac{\pi}{6}) + a$. 由 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 得 $x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, 因此当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, 即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $2\sqrt{2} + a$, 令 $2\sqrt{2} + a = 3$, 解得 $a = 3 - 2\sqrt{2}$, 符合题意. 故存在正实数 $a = 3 - 2\sqrt{2}$, 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 上有最大值 3.

18. 如图所示的自动通风设施. 该设施的下部是等腰直角三角形 ABC , 其中斜边 AB 是 2 米, 上部 Amb 是个半圆, 固定点 M 为 AB 的中点. EF 是由电脑控制可以上下滑动的伸缩横杆 (横杆面积可以忽略不计), 且滑动过程中始终保持和 AB 平行. 当 EF 位于 AB 下方和上方时, 通风窗的形状均为矩形 $EFHG$, 其中点 G, H 在 AB 上 (阴影部分均不通风).

(1) 设点 C 到 EF 之间的距离为 x 米, 试将通风窗的通风面积 S (平方米) 表示成关于 x 的函数 $y = S(x)$;

(2) 当点 C 到 EF 之间的距离为多少米时, 通风窗的通风面积 S 取得最大值, 并求出最大值.

解: (1) 由题意, 当 EF 位于 AB 下方时, 连接 CM , 交 EF 于点 K , 则 $CM = \frac{1}{2}AB = 1$, $CK = x (0 < x < 1)$, $EG = FH = 1 - x$, 由 $EF \parallel AB$, 可得 $\frac{CK}{CM} = \frac{EF}{AB}$, 即 $\frac{x}{1} = \frac{EF}{2}$, 所以 $EF = 2x$, 所以此时通风窗的通风面积 $S = EF \cdot EG = 2x(1 - x) (0 < x < 1)$, 当 EF 位于 AB 上方时, 则有 $1 < x < 2$, 连接 EM , 则有 $EG = FH = x - 1$, $EM = \frac{1}{2}AB = 1$, 则 $GM = MH = \sqrt{EM^2 - EG^2} = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, 所以 $EF = GH = 2GM = 2\sqrt{1 - (x - 1)^2} (1 < x < 2)$, 所以此时通风窗的通风面积 $S = EF \cdot EG = 2(x - 1)\sqrt{1 - (x - 1)^2} (1 < x < 2)$, 综上可得 $S(x) =$

$$\begin{cases} 2x(1 - x) (0 < x < 1) \\ 2(x - 1)\sqrt{1 - (x - 1)^2} (1 < x < 2) \end{cases};$$

(2) 由 (1) 知 $S(x) = \begin{cases} 2x(1 - x) (0 < x < 1) \\ 2(x - 1)\sqrt{1 - (x - 1)^2} (1 < x < 2) \end{cases}$, 当 $0 < x < 1$ 时,

$S(x) = 2x - 2x^2 = -2(x^2 - x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 通风窗

的通风面积取得最大值 $\frac{1}{2}m^2$; 当 $1 < x < 2$ 时, $S(x) = 2(x -$

$1)\sqrt{1 - (x - 1)^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2} \cdot \sqrt{1 - (x - 1)^2} \leq (x - 1)^2 + [1 - (x - 1)]^2 = 1$, 当且仅当 $x - 1 =$

$\sqrt{1 - (x - 1)^2}$, 即 $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号成立, 所以此时通风窗的通风面积最大值为 1, 综上所述, 当点 C

到 EF 之间的距离为 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}m$ 时, 通风窗的通风面积取得最大值 $1m^2$.

