数学解题的水平划分（续）

罗增儒（陕西师范大学数学与信息科学学院）

文章编号：1002-2171(2020)4-0002-04

2.3　体现水平3的解题

下面的问题可能就要进入解题的第三阶段了。

例3-1　将$n(n\geqslant 2)$名同学任意分成两组，给两组之间的每两名同学都拉上一条绳子（同一组内的同学不拉绳子），继续这一过程，只要某组的同学数大于1，就把这组同学再随意分成两组，并给两组之间的每两名同学再拉一条绳子，直至每组只有1名同学为止。求过程结束时绳子的总数。

讲解：分3步（探索、类比、证明）讲解如下。

(1)探索："难的不会想简单的"，特殊化分组，发现结果。

对n名同学做$(n-1)+1$分组，用$n-1$条绳子。

对$n-1$名同学做$(n-2)+1$分组，用$n-2$条绳子。

依此类推，最后对2名同学做$1+1$分组，用1条绳子。

对这个特殊的分组，绳子的总数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}\text{(条)}。$$

由此发现，这与例1-2中"数线段"的结果是一样的，属于C_n^2模型（化归为基本问题）。当然，对任意分组是否成立还需要证明，但是，证明的方向已经有了。

(2)类比：类比"数线段"的求解。将人对应为点，将两人拉绳子对应为两点连线，则每一个人都与另外$n-1$个人拉绳子就对应每一个点都与另外$n-1$个点连线，……这样一想，思路应该是通的。

(3)证明：将n名同学记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，任取其中1名同学A_i（参见图3）。当全体同学被分成A,B两组时（A_i在A组），A_i与B组中的每一名同学都拉有绳子，当A_i所在的组继续又分出C组来时，A_i又与C组中的每一名同学都拉有绳子，依此类推，直至这组只有A_i一名同学时，A_i就与A_i之外的$n-1$名同学都拉有绳子。n名同学总计可得$n(n-1)$条绳子。但在这个计算中，每条绳子都重复计算了1次，故得绳子总数为$\frac{n(n-1)}{2}$条。

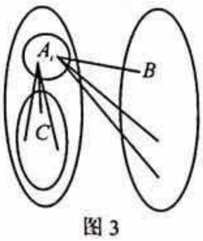

图3

例3-2　（变式1）将平面上的$n(n\geqslant 2)$个点任意分成两堆，记下这两堆点数的乘积。继续这一过程，只要某堆的点数大于1，就把这堆点再随意分成两小堆，并记下两小堆点数的乘积，直至每堆只有1个点为止。求上述所有乘积之和。

讲解：(1)做特殊化分组，发现结果。

对n个点做$(n-1)+1$分组，乘积为$(n-1)\times 1=n-1$。

对$n-1$个点做$(n-2)+1$分组，乘积为$(n-2)\times 1=n-2$。

依此类推，最后对2个点做$1+1$分组，乘积为$1\times 1=1$。

对这个特殊的分组，所有乘积之和为

$$N_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}。$$

由此发现，这与例3-1的结果是一样的。

(2)理性说明。此例确实与例3-1"形异而质同"：将n个点记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，如图4，当全体点被分成A（设有m_1个点），B（设有n_1个点）两堆做乘法时，我们将A中每一个点都与B中的每一个点做连线，A内部不连线，B内部不连线，则连线的条数就是A,B两堆点数的乘积（有m_1n_1条连线）。可见，例3-2每次分堆点数的乘积就是例3-1中每次分组两人拉绳子的条数，所有乘积之和就是n个人两两拉绳

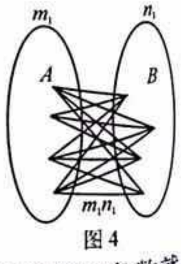

图4

子的总和(即例 1-2 中 n 个点两两连线的条数)。

思路是通的，书写留给读者。

例 3-3 （变式 2，2016 年陕西师范大学自主招生考试试题）将 $n(n\geqslant 2)$ 名同学任意分成两组，分手时，两组之间的每两名同学都握手告别一次（同一组内的同学不握手），继续这一过程，只要某组的同学数大于 1，就把这组同学再随意分成两组，并进行握手告别，直至每组只有 1 名同学为止。设过程结束时握手告别的总次数为 a_n。

（Ⅰ）求和 $a_2+a_3+\cdots+a_n$；

（Ⅱ）求证 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$。

讲解：由例 3-1 知 $a_n=C_n^2$，裂项求和、交叉消去可得答案。这是将 C_n^2 模型与数列、不等式加以沟通，提高了问题的综合性和思维要求，属于“水平 3”的档次。

例 3-4 （变式 3）已知 $n(n\geqslant 2)$ 个学习小组里有 a_n 名同学，满足：每两个小组里都有一名相同的同学，每名同学都恰好参加两个小组。

（Ⅰ）求和 $a_2+a_3+\cdots+a_n$；

（Ⅱ）求证 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$。

讲解：把学习小组对应为点，同学对应为两点之间的连线，“两个小组里都有一名相同的同学”就在两点之间连一条线，每两点都有连线；又由于“每名同学都恰好参加两个小组”，故每两点都连且只连一条线，得到一个图，图中有 C_n^2 条边(参见图 2)，得 $a_n=C_n^2$ 名同学。下来，裂项求和、交叉消去可得答案。与例 3-3 类似，这是将 C_n^2 模型与数列、不等式加以沟通，但是，此题中“$n(n\geqslant 2)$ 个学习小组里有 a_n 名同学”的情境，比例 3-3 的“握手”更需要思考。

例 3-5 （2019 年高考数学江苏卷第 23 题）在平面直角坐标系 xOy 中，设点集

$A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$，

$B_n=\{(0,1),(n,1)\}$，

$C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$。从集合 M_n 中任取两个不同的点，用随机变量 X 表示它们之间的距离。

（Ⅰ）当 $n=1$ 时，求 X 的概率分布；

（Ⅱ）对给定的正整数 $n(n\geqslant 3)$，求概率 $P(X\leqslant n)$（用 n 表示）。

讲解：虽然题意以集合的方式呈现，但集合 M_n 就是一个以 $(0,0)$，$(n,0)$，$(n,2)$，$(0,2)$ 为顶点的矩形边上的整点(格点)，有勾股定理的知识就可以计算两个整点之间的距离。

（Ⅰ）当 $n=1$ 时，如图 5，矩形边上有 6 个整点，X 的所有可能取值为 1(有 7 条线段)，$\sqrt{2}$(有 4 条线段)，2(有 2 条线段)，$\sqrt{5}$(有 2 条线段)，而基本事件有 $C_6^2=15$ 个(C_n^2 模型与概率沟通)，得

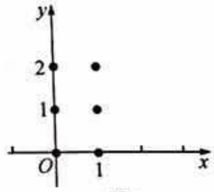

图 5

$$P(X=1)=\frac{7}{C_6^2}=\frac{7}{15},P(X=\sqrt{2})=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15},P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15}。$$

所以，X 的概率分布为

X	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

（Ⅱ）当 $n\geqslant 3$ 时，如图 6，M_n 中的点有 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n,Q_0,Q_n,R_0,R_1,R_2,\cdots,R_n$，共 $2n+4$ 个点，基本事件有 C_{2n+4}^2 个。又在 A_n,B_n,C_n 内任意两点间距离不超过 n(含 $2C_{n+1}^2+1$ 个基本事件)，而对 $n\geqslant 3,n\geqslant k\geqslant 1$，由

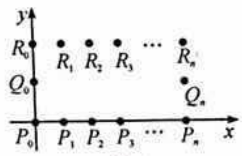

图 6

$[(n-k)^2+1]-n^2=k^2+1-2kn=k(k-n)+(1-kn)<0$，

$[(n-k)^2+4]-n^2\leqslant(n-1)^2+4-n^2=5-2n<0$ $(n\geqslant 3)$

可见，除下述 6 条对角线外，两集合间任两点连线之长均小于 n(含 $2C_2^1C_{n+1}^1+C_{n+1}^1C_{n+1}^1-6$ 个基本事件)。又

$$P_0Q_n=\sqrt{n^2+1}>n,Q_0P_n=\sqrt{n^2+1}>n,$$

$$Q_0R_n=\sqrt{n^2+1}>n,R_0Q_n=\sqrt{n^2+1}>n,$$

$$P_0R_n=\sqrt{n^2+4}>n,R_0P_n=\sqrt{n^2+4}>n。$$

所以，$P(X>n)=\frac{6}{C_{2n+4}^2}$，从而 $P(X\leqslant n)=1-P(X>n)=1-\frac{6}{C_{2n+4}^2}$。

这道题目，体现了 C_n^2 模型与概率的沟通，属于“水平 3”的档次。

2.4 体现水平 4 的解题

最后，看一道追求"自觉理解"、进行"自觉分析"的例子。

例 4-1 甲、乙两队各派 7 名队员按事先安排好的顺序出场参加围棋擂台赛。双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，依次类推，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程，那么所有可能出现的比赛过程的种数有多少？

解法 1：由对称性，只需计算一方获胜的种数，乘以 2，便可得"所有可能出现的比赛过程"的种数。设甲、乙两队的队员按出场顺序分别为 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 和 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$。

又设甲方进行到 A_k 时获胜（$1\leqslant k\leqslant 7$），这表明 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$ 和 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$ 全都告负，把这 $(k-1)+7$ 名选手按出场顺序排成一列，则 B_7 必排在第 $(k-1)+7$ 格，这相当于在前 $(k-1)+6$ 个空格按"下标从左到右递增的顺序"放上 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$，有 $C_{(k-1)+6}^{k-1}$ 种放法，剩下的 6 个空格也按"下标从左到右递增的顺序"放上 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6，只有 1 种放法；取 $k=1,2,\cdots,7$，得甲方获胜的方式有 $C_6^0+C_7^1+C_8^2+C_9^3+C_{10}^4+C_{11}^5+C_{12}^6$ 种。得"所有可能出现的比赛过程"为 $2(C_6^0+C_7^1+C_8^2+C_9^3+C_{10}^4+C_{11}^5+C_{12}^6)$ 种。

反思 1：答案是对的，但结果不够简练（当年（1988 年）的评分标准要扣分），其中的 $C_6^0+C_7^1+C_8^2+C_9^3+C_{10}^4+C_{11}^5+C_{12}^6=C_{13}^6$，这促使我们思考（自觉反思）能不能直接计算 C_{13}^6 或 C_{13}^7。

反思 2：理解上述解法（自觉分析），抓住关键步骤是"把甲取胜的一个比赛过程对应 $(k-1)+6$ 名选手按出场顺序排成一列"。按照同样的道理，也可以把 14 名选手按出场顺序排成一列，在第 14 号位置安排甲选手。

解法 2：由对称性，只需计算一方获胜的种数，乘以 2，便可得"所有可能出现的比赛过程"的种数。设甲、乙两队的队员按出场顺序分别为 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 和 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$。

每一个比赛过程对应着这 14 个元素的一个排列，且满足 A_k 的下标从左到右是递增的，B_k 的下标从左到右也是递增的。又设甲方获胜，则第 14 号位置一定是甲选手 A_7。先从前 13 个位置中取出 6 个有序地放上 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6，有 C_{13}^6 种放法；然后，剩下的 7 个位置有序地排上 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$，只有 1 种放法，得甲方获胜的方式有 C_{13}^6 种，故"所有可能出现的比赛过程"为 $2C_{13}^6=3\ 432$ 种。

反思 3：解法 2 与解法 1 的思路是相同的，但过程和结果都简单了，并且只要去想，大家都能努力做到。继续思考（自觉分析），由于 $2C_{13}^6=C_{14}^7$，能不能直接计算 C_{14}^7？对，只需在解法 2 中去掉"第 14 个位置一定是甲选手 A_7"即可。

解法 3：设甲、乙两队的队员按出场顺序分别为 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 和 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$。

每一个比赛过程对应着这 14 个元素的一个排列，且满足 A_k 的下标从左到右是递增的，B_k 的下标从左到右也是递增的。由于从 14 个位置中取出 7 个来，有序地排上 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$，共有 C_{14}^7 种排法，而剩下的 7 个位置有序地排上 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$，只有 1 种排法，所以，问题的实质是从 14 个相异元素中取出 7 个的组合数，得 $C_{14}^7=3\ 432$ 种比赛过程。

理解方法的实质，可以得出推广。

例 4-2 甲方派 m 名队员、乙方派 n 名队员，按事先安排好的顺序出场参加围棋擂台赛。双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，依次类推，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程，则所有可能出现的比赛过程有 C_{m+n}^m（或 C_{m+n}^n）种。

又，$C_{m+n}^m=C_{m+n-1}^n+C_{m+n-1}^m$，其中，$C_{m+n-1}^n$ 是甲取胜的种数，C_{m+n-1}^m 是乙取胜的种数。

反思 4：注意到甲、乙取胜的种数 C_{m+n-1}^n 与 C_{m+n-1}^m，正是"相异元素可重组合"的计算公式，故又可用可重组合的更多方法来求解例 4-1。如

解法 4：设甲方队员的出场顺序为 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$，乙方队员的出场顺序为 $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$，对于甲方获胜可设 A_i 获胜的场数是 x_i，$0\leqslant x_i\leqslant 7$，$1\leqslant i\leqslant 7$，且

$$x_1+x_2+\cdots+x_7=7。\qquad ①$$

易知，“不同的比赛过程”与“方程①的不同非负整数解”一一对应。例如，解(2,0,0,1,3,1,0)对应的比赛过程为：A_1 胜 B_1 和 B_2；B_3 胜 A_1，A_2，A_3；A_4 胜 B_3 后负于 B_4；A_5 胜 B_4，B_5，B_6 后负于 B_7；最后 A_6 胜 B_7 结束比赛。下面求方程①的非负整数解个数，设 $y_i=x_i+1$，问题等价于方程

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7=14。 \quad ②$$

正整数解的个数，将上式写成 $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=14$。

方程②正整数解的个数，转化为从 13 个加号取 6 个的方法数，得 C_{13}^{6} 种。即甲方获胜的不同的比赛过程有 C_{13}^{6} 种。

同理，乙方获胜的不同的比赛过程也有 C_{13}^{6} 种，合计 $2C_{13}^{6}=3\ 432$ 种比赛过程。

解法 5：建立下面的对应，集合$\{A_1,A_2,\cdots,A_7\}$的任一个 7 元可重组合对应着一个比赛过程，且这种对应也是一一对应。如前述(2,0,0,1,3,1,0)的比赛过程对应的 7 长可重组合是$\{A_1,A_1,A_4,A_5,A_5,A_5,A_6\}$，所以甲方获胜的不同的比赛过程的总数就是集合$\{A_1,A_2,\cdots,A_7\}$的 7 长可重组合的个数 $C_{7+7-1}^{7}=C_{13}^{7}$。

同理，乙方获胜的不同的比赛过程也有 C_{13}^{7} 种，合计 $2C_{13}^{7}=3\ 432$ 种比赛过程。

以上的例子及其处理，到底能不能说明四个水平？是否有助于学生对数学本质的深刻认识和深度把握？可不可以帮助学生用数学的眼光发现和提出问题、用数学的思维分析和解决问题、用数学的语言表达和交流问题等，我都留给大家去思考、评判和实证。

（续完）