

2021 年全国统一高考数学试卷 (天津卷)

一. 选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

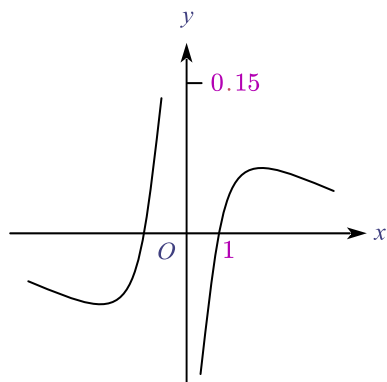
1. 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$

- (A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1, 3, 5\}$ (C) $\{0, 1, 2, 4\}$ (D) $\{0, 2, 3, 4\}$

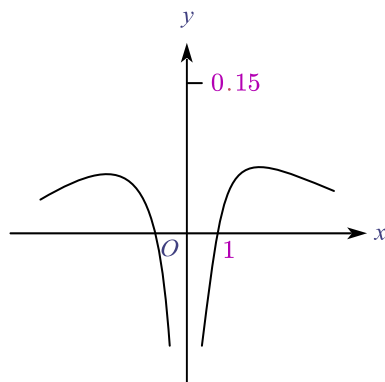
2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 6$ ” 是 “ $a^2 > 36$ ” 的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

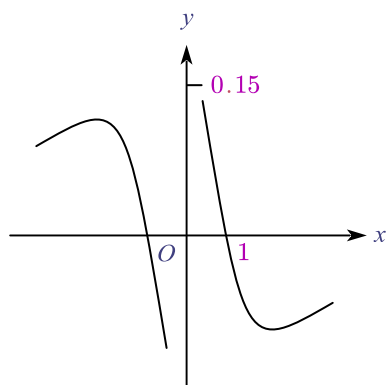
3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图像大致为



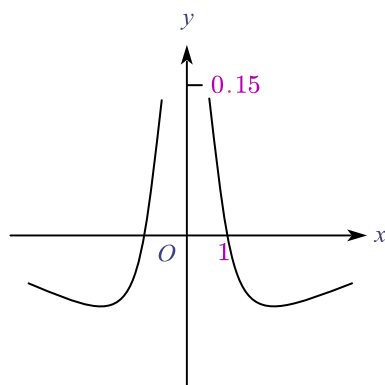
(A)



(B)

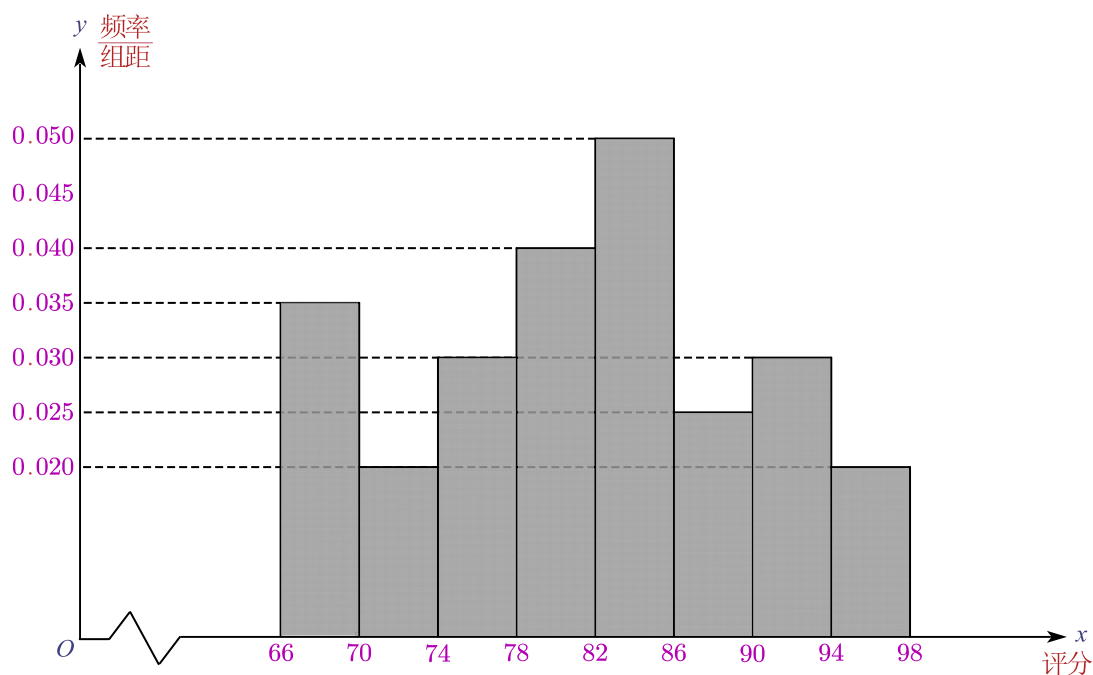


(C)



(D)

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取 400 部, 统计其评分数据, 将所得 400 个评分数据分为 8 组: $[66, 70)$, $[70, 74)$, $\dots$, $[94, 98]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间 $[82, 86)$ 内的影视作品数量为



- (A) 20 (B) 40 (C) 64 (D) 80

5. 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $c < a < b$
(C) $b < c < a$ (D) $a < c < b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 1:3, 则这两个圆锥的体积之和为

- (A) 3π (B) 4π (C) 9π (D) 12π

7. 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$

- (A) -1 (B) $\lg 7$ (C) 1 (D) $\log_7 10$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合, 抛物线的准线交双曲线于 A 、 B 两点, 交双曲线的渐近线与 C 、 D 两点, 若 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$, 则双曲线的离心率为

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

9. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰好有 6 个零点,

则 a 的取值范围是

- (A) $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ (B) $\left(\frac{7}{4}, 2\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$
(C) $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ (D) $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分。

10. i 是虚数单位，复数 $\frac{9+2i}{2+i} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 在 $(2x^3 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中， x^6 的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A ，与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切于点 B ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 甲、乙两人在每次猜谜语活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对一方获胜，否则本次平局。已知每次活动中，甲乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{5}$ ，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；3 次活动中，甲至少获胜 2 次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中。 D 为线段 BC 上的动点， $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E ， $DF \parallel AB$ 交 AC 于点 F ，则 $|\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}|$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三. 解答题：本大题共 5 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ ，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ 。 $b = \sqrt{2}$ 。

(I) 求 a 的值；

(II) 求 $\cos C$ 的值；

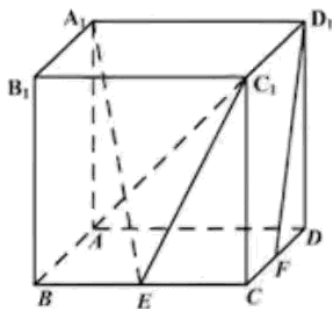
(III) 求 $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

17 (本小题满分 15 分) 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点，

(1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ；

(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角的正弦值；

(3) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值。



18. (本小题满分 15 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，上顶点为 B ，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，且 $|BF| = \sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆的方程；

(2)直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M ，与 y 轴的正半轴交于点 N ，过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P ，若 $MP \parallel BF$ ，求直线 l 的方程

19. (本题满分15分) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，其前8项的和为64. $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列， $b_1 = 4$ ， $b_3 - b_2 = 48$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in N^*$.

(i) 证明 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列；(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$.

20. (本小题满分16分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - x \cdot e^x$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切点的方程；

(2) 证明 $f(x)$ 存在唯一极值点；

(3) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对于任意的 $x \in R$ 成立，求实数 b 的取值范围.

《初高中数学教研微信系列群》简介：

目前有15个群（13个高中群，2个初中群），共5000多优秀、特、高级教师，省、市、区县教研员、教辅公司数学编辑、报刊杂志高中数学编辑等汇聚而成，是一个围绕高中数学教学研究展开教研活动的微信群。

宗旨：脚踏实地、不口号、不花哨、接地气的高中数学教研！

特别说明：

1. 本系列群只探讨高中数学教学研究、高中数学试题研究等相关话题；
2. 由于本群是集“研究—写作—发表（出版）”于一体的“桥梁”，涉及业务合作，特强调真诚交流，入群后立即群名片：

教师格式：省+市+真实姓名，如：四川成都张三

编辑格式：公司或者刊物（简写）+真实姓名

欢迎各位老师邀请你身边热爱高中数学教研（不喜欢研究的谢绝）的教师好友（学生谢绝）加入，大家共同研究，共同提高！

群主二维码：见右图



2021 年全国统一高考数学试卷（天津卷）

参考答案与试题解析

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, 2, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$

- (A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1, 3, 5\}$ (C) $\{0, 1, 2, 4\}$ (D) $\{0, 2, 3, 4\}$

【思路分析】考查集合的运算，要看清楚题目是取交集还是并集.

【解析】(河南洛阳刘友友老师解析) 由 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 得 $A \cap B = \{1\}$, 所以 $(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 1, 2, 4\}$, 选 C.

【归纳总结】此类型题较为基础，考查学生对集合基本运算的掌握情况.

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 6$ ” 是 “ $a^2 > 36$ ” 的

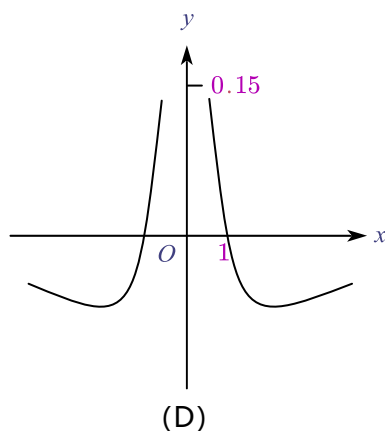
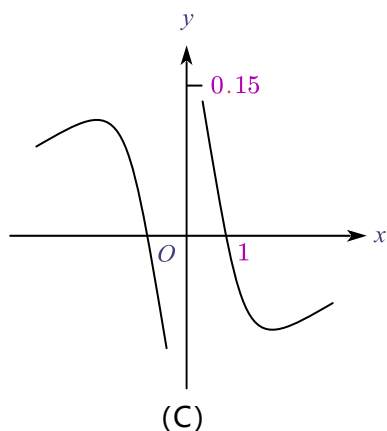
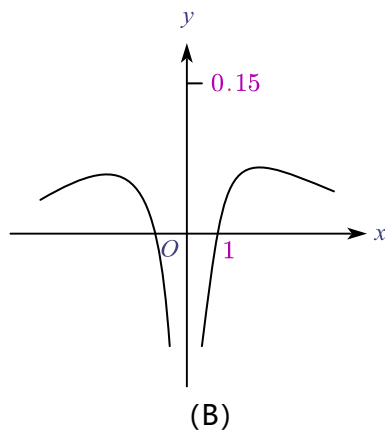
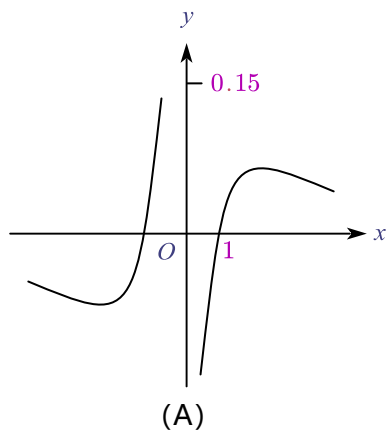
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

【思路分析】要把 $a^2 > 36$ 这一条件进行整理或化简，进而判断是充分还是必要条件.

【解析】(河南洛阳刘友友老师解析) $a^2 > 36$ 等价于 $|a| > 6 \Leftrightarrow a > 6$ 或 $a < -6$, 故 $a > 6 \Rightarrow |a| > 6$, 即 $a^2 > 36$, 但 $|a| > 6 \nRightarrow a > 6$, 因此 “ $a > 6$ ” 是 “ $a^2 > 36$ ” 的充分不必要条件.

【归纳总结】本题考查充分条件与必要条件，可以借助口诀：“小充分大必要”，提升做题速度.

3. 函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的图像大致为

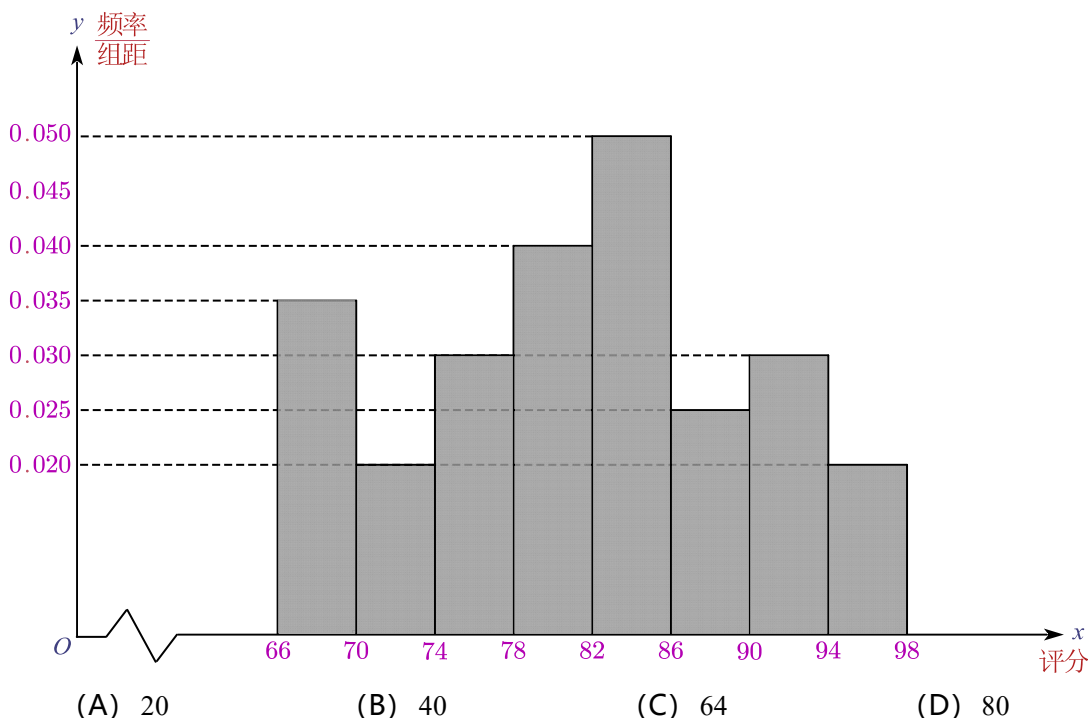


【思路分析】先判断函数 $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ 的奇偶性，然后取特殊值即可得到正确选项.

【解析】(河南洛阳刘友友老师解析) 易得 $y = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 为偶函数, 故可排除 A, C 选项, 当 $x=2$ 时, $y = \frac{\ln 2}{4+2} > 0$, 故可排除 D 选项. 即答案选 B.

【归纳总结】判断函数的大致图像, 一般步骤是判断奇偶性、单调性, 然后结合特殊值的情况加以确定图像.

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取 400 部, 统计其评分数据, 将所得 400 个评分数据分为 8 组: $[66, 70)$, $[70, 74)$, $\dots$, $[94, 98]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间 $[82, 86)$ 内的影视作品数量为



【思路分析】要求分布在区间 $[82, 86)$ 人数, 只需要知道总人数及该区间的频率就可以算出.

【解析】(河南洛阳刘友友老师解析) 由频率分布直方图可得评分在区间 $[82, 86)$ 内的频率为: $0.050 \times 4 = 0.2$, 所以影视作品数量为: $0.2 \times 400 = 80$, 选 D.

【归纳总结】频率分布直方图的纵截距是频率/组距, 千万别忽略组距而导致计算错误.

5. 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $c < a < b$
 (C) $b < c < a$ (D) $a < c < b$

【思路分析】利用中间变量 1 和 0 比较

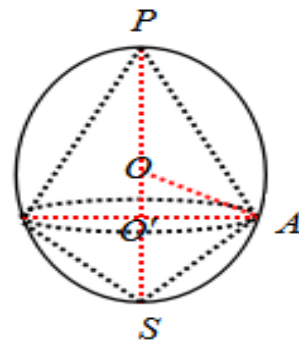
【解析】(甘肃庆阳柳广社解析) $\because a = \log_2 0.3 < \log_2 1 = 0$,
 $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4 = -\log_2 0.4 > -\log_2 0.5 = 1$, $0 < c = 0.4^{0.3} < 0.4^0 = 1$,
 $\therefore a < c < b$, 故选 D.

【归纳总结】本题考查常见指数、对数式子的大小比较. 基础题

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 1:3, 则这两个圆锥的体积之和为

- (A) 3π (B) 4π (C) 9π (D) 12π

【思路分析】先画出圆锥与球的轴截面，在旋转轴 PS 上找出球心，据球心 O 到 P、S、A 点距离均相等即可得。



【解析】(甘肃庆阳柳广社解析) 如图所示：由球的体积为 $\frac{32\pi}{3}$ ，可得该

球的半径 $R = 2$ ，

由题意得，两个圆锥的高 $O'S$ 、 $O'P$ 分别为 1 和 3，

$\because PS$ 为球 O 的直径， $\therefore \triangle PAS$ 为直角三角形，

又 $\because O'A \perp PS$ ，

$\therefore$ 可得截面圆半径 $O'S = \sqrt{3}$

所以这两个圆锥的体积之和为 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot (3+1) = 4\pi$ ，故选 B.

【归纳总结】本题主要考查圆锥与其外接球相关知识，包括空间想象能力和化归转化能力，属于中等题。

7. 若 $2^a = 5^b = 10$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$

(A) -1 (B) $\lg 7$ (C) 1 (D) $\log_7 10$

【思路分析】利用指数式和对数式的关系解出 a 和 b ，然后结合对数换底公式等运算性质即可求解。

【解析】(甘肃庆阳柳广社解析) $\because 2^a = 5^b = 10$ ， $\therefore a = \log_2 10$ ， $b = \log_5 10$ ，

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10} = \lg 2 + \lg 5 = 1, \text{ 故选 C.}$$

【归纳总结】本题考查指数式和对数式的相关运算性质，属于基础题。

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合，抛物线的准线交双曲线于 A、B 两点，交双曲线的渐近线于 C、D 两点，若 $|CD| = \sqrt{2}|AB|$ ，则双曲线的离心率为

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

【思路分析】统一用 a 、 b 、 c 表示出 CD 和 AB 间的等式，最后转化成 a 、 c 间的关系求 e 。

【解析】(甘肃庆阳柳广社解析) 根据题意知抛物线准线方程为 $x = -c$ ， $\therefore |AB| = \frac{2b^2}{a}$ ， $|CD| = \frac{2bc}{a}$ ，
 $\therefore |CD| = \sqrt{2}|AB|$ ， $\therefore c = \sqrt{2}b$ ，又 $\because c^2 = a^2 + b^2$ ， $\therefore a = b$ ，

$\therefore$ 双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，故选 A.

【归纳总结】本题考查抛物线与双曲线图像及其简单的性质，属于中等题。

9. 设 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰好有 6 个零点，

则 a 的取值范围是

(A) $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$ (B) $\left(\frac{7}{4}, 2\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$

(C) $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ (D) $\left(\frac{7}{4}, 2\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$

【思路分析】分 $x < a$, $x \geq a$ 两种情况讨论, 当 $x < a$ 时, 且 $\frac{7}{4} < a \leq \frac{9}{4}$ 时, $f(x)$ 有 4 个零点, $\frac{9}{4} < x \leq \frac{11}{4}$, $f(x)$ 有 5 个零点, $\frac{11}{4} < x \leq \frac{13}{4}$, $f(x)$ 有 6 个零点, 当 $x > a$ 时, 即 $2 < a \leq \frac{5}{2}$, $f(x)$ 有两个零点, 当 $-2a + 5 < 0$ 时, 即 $a > \frac{5}{2}$, $f(x)$ 有 1 个零点, 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 有一个零点, 综合两种情况, 即可求解.

【解析】(甘肃庆阳柳广社解析)

因为二次方程最多有 2 个零点, 所以 $f(x) = \cos(2\pi x - 2\pi a)$ 至少有 4 个根,

因为 $f(x) = \cos(2\pi x - 2\pi a) = \cos 2\pi(x - a)$, 而 $2\pi(x - a) = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

整理得 $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + a, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 0 < \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + a < a \Rightarrow -2a - \frac{1}{2} < k < -\frac{1}{2}$.

① $x < a$ 时, 当 $-5 \leq -2a - \frac{1}{2} < -4$, $f(x)$ 有 4 个零点, 即 $\frac{7}{4} < a \leq \frac{9}{4}$,

当 $-6 \leq -2a - \frac{1}{2} < -5$, $f(x)$ 有 5 个零点, 即 $\frac{9}{4} < a \leq \frac{11}{4}$,

当 $-7 \leq -2a - \frac{1}{2} < -6$, $f(x)$ 有 6 个零点, 即 $\frac{11}{4} < a \leq \frac{13}{4}$,

$x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 + 5) = 0$, 解得: $a = 2$,

当 $a < 2$ 时, $\Delta < 0$, $f(x)$ 无零点,

当 $a = 2$ 时, $\Delta = 0$, $f(x)$ 有 1 个零点,

当 $a > 2$ 时, 令 $f(a) = a^2 - 2a(a+1) + a^2 + 5 = 0$, 解得 $a = \frac{5}{2}$,

则当 $2 < a \leq \frac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点, 当 $a > \frac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点.

② 即 $x \geq a$ 时, $a < 2$ 时, $f(x)$ 无零点, $a = 2$ 或 $a > \frac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点,

$2 < a \leq \frac{5}{2}$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点.

综上①②可得 $a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right] \cup \left(2, \frac{9}{4}\right]$. 故选 A.

【归纳总结】本题考查了余弦函数和二次函数, 需要学生掌握分类讨论的思想, 且本题综合性强, 属于难题.

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{9+2i}{2+i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【思路分析】本题考查复数的运算, 利用复数的运算法则计算即可.

【解析】(河南洛阳李省伟老师解析) $\frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{18-9i+4i-2i^2}{2^2-i^2} = \frac{20-5i}{5} = 4-i$

【归纳总结】复数一般考查复数的运算法则, 化简求运算结果、复数的模长、共轭复数、几何性质象限判断、周期运算以及模长与圆锥曲线定义结合, 偶尔也会考察一元二次方程的虚数根. 难点在

于审题与计算，难度一般。

11 在 $(2x^3 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中， x^6 的系数是_____。

【思路分析】本题考查二项式的展开式系数，运用二项式定理第 $r+1$ 项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ 展开求解。

【解析】(河南洛阳李省伟老师解析) $(2x^3 + \frac{1}{x})^6$ 的第 $r+1$ 项为

$$T_{r+1} = C_6^r (2x^3)^{6-r} (\frac{1}{x})^r = C_6^r 2^{6-r} x^{3(6-r)} \cdot x^{-r} = C_6^r 2^{6-r} x^{18-4r}$$

$\because x^{18-4r} = x^6$ 得 $r=3 \therefore T_4 = C_6^3 \times 2^3 \times x^6 = 160x^6 \therefore x^6$ 的系数是 160。

【归纳总结】二项式需要理解 $(a+b)^n$ 展示的思想，一般考查二项式定理，常见题型为求某一项、或者某一项系数，以及二项式的逆用，赋值法求二项式系数和或者展开项系数和。难点在于审题与规范计算，难度中等。

12. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A ，与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切于点 B ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【思路分析】本题考查直线与圆位置关系，考察数形结合思想，画出图像，利用已知条件，用解三角形的方式，计算求得切线长。

【解析】(刘家范老师解析) 设圆心为 M ，由直线的斜率为 $\sqrt{3}$ 知此切线的倾斜角为 60° ，又切线与 y 轴交点为 A ，所以 $\angle MAB = 30^\circ$ ，又 $\angle ABM = 90^\circ$ ，且 $MB=1$ ，所以 $AM=2$ ，即 $|AB| = \sqrt{AM^2 - BM^2} = \sqrt{3}$

【归纳总结】解析几何，直线与圆的关系、圆锥曲线，作为选择填空小题出现，重点考查学生数形结合能力，能否根据已知条件画出相应图形，根据几何关系再进行运用。解题过程中如果能巧用图形的几何关系，会大大降低计算量。难点在于审题作图与计算，难度中等。

13. 若 $a > 0, b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为_____。

【思路分析】题中条件较少，求式子最值。求式子最值主要考察均值不等式，基本均值不等式为两项关系，和为定值求积的最小值或者积为定值求和的最小值。而本题是 3 项，用均值不等式的一般形式：如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个正数，则 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ 当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时，等号成立。代入运算法则计算即可。

【思路分析】对于给式求最值，考虑用均值不等式，其使用条件为：“一正二定三相等”，当条件不满足时，要创造基本不等式的使用条件，注意“和定积最小”或者“积定和有最大”。

【解析】解法一：(河南洛阳李省伟老师解析) $\because \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b = \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}} = 2\sqrt{2}$$

当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2} = \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$ 成立，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 取得最小值

解法二：(刘家范补解)： $\because a > 0, b > 0, \therefore \frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{a}{b^2}} + b = \frac{2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \times b} = 2\sqrt{2}$ 当

且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2}$ 和 $\frac{2}{b} = b$ 同时成立，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时成立

【归纳总结】利用均值不等式求最值是高考的重要的考点之一，常见考法是如何灵活地创造基本不

等式使用条件,如: 凑系数、拆项、1 的替换等, 对于两次使用基本不等式时要保证等式能同时成立, 难度中等。

14. 甲、乙两人在每次猜谜语活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对一方获胜, 否则本次平局。已知每次活动中, 甲乙猜对的概率分别为 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{5}$, 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响, 各次活动也互不影响, 则一次活动中, 甲获胜的概率为 ____; 3 次活动中, 甲至少获胜 2 次的概率为 ____。

【思路分析】本题考查独立事件的概率与独立重复事件概率, 分步与分类计数法的应用。甲、乙二人猜谜语结果互不影响, 根据题中条件, 甲获胜即为甲猜对乙猜错。3 次活动中, 每次互不影响, 即独立重复事件概率。甲至少胜 2 次, 即甲获胜 2 次或 3 次, 分别求出再求和。

【思路分析】本题第一空考查独立事件的概率公式, 第二空考查二项分布概率公式。

【解析】(河南洛阳李省伟老师解析) (1) 根据题中条件, 事件甲获胜为甲猜对乙猜错。

$$P = \frac{5}{6} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{1}{3}$$

(2) 根据独立重复事件的概率

$$\text{甲获胜 2 次的概率为 } P(X=2) = C_3^2 (\frac{1}{3})^2 \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$$

$$\text{甲获胜 3 次的概率为 } P(X=3) = C_3^3 (\frac{1}{3})^3 \times (1 - \frac{1}{3})^0 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore \text{甲至少胜 2 次的概率为 } P = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

故: 甲获胜的概率为 $\frac{1}{3}$; 3 次活动中, 甲至少获胜 2 次的概率为 $\frac{7}{27}$ 。

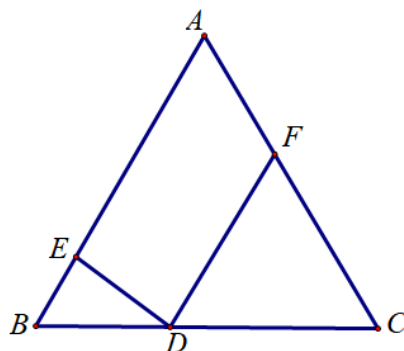
【归纳总结】事件的概率重点理解事件的独立性, 是或事件还是并, 分步分类。分析明白事件类型后, 求概率就相对容易了。此考点难点在于审题理解题意中事件的类型, 难度中等。

【归纳总结】求解随机事件的概率首先要理清所求事件间的关系, 然后利用概率的有关性质或者常见的概率分布求解概率, 难度中等。

16. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中。 D 为线段 BC 上的动点, $DE \perp AB$ 且交 AB 与点 E , $DF \parallel AB$ 交 AC 于点 F , 则 $|\overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF}|$ 的值为 ____; $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$ 的最小值为 ____。

【思路分析】本题考查知识点向量, 向量模长及最值。考察数形结合思想, 根据题中条件, 作出图形, 再根据条件求解答案。

【解析】(河南洛阳李省伟老师解析) 如图所示:



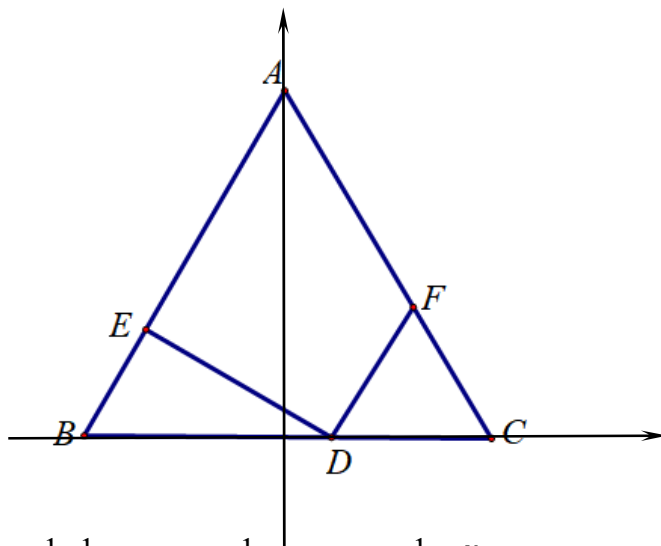
[经验法]: (1) 根据条件可得, $|\overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF}|$ 的值应不受动点 D 位置影响。

故若取 D 点与 B 点重合, 则 E 点与 B 点重合, F 点与 A 点重合。

$$\text{则 } |\overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF}| = |\vec{0} + \overrightarrow{BA}| = 1$$

(第一空速解: 过 F 作 $FH \perp AB$ 于 H , 易证: 四边形 $DEHF$ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{HA}$, 所以 $|\overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF}| = |\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{BA}| = 1$)

[普通法]: 建立如图所示坐标系, 则 A, B, C 点坐标为 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$



设 D 点坐标为 $(x, 0)$, $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 则 $|\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} + x$, $|\overrightarrow{BE}| = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$,

E 点坐标为 $E(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4}x, \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}x)$

$|\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2} - x$, $|\overrightarrow{DF}| = \frac{1}{2} - x$, $F(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2})$

$$(1) \overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF} = 2(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}x}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$|\overrightarrow{2BE} + \overrightarrow{DF}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$(2) \overrightarrow{DE} = (-\frac{3x}{4} - \frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}x}{4})$$

$$\overrightarrow{DF} = (\frac{1}{4} - \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}x}{2}); \overrightarrow{DA} = (-x, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA} = (-\frac{5x}{4} - \frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}x}{4}) \cdot (-x, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= (-\frac{5x}{4} - \frac{1}{8}) \cdot (-x) + (\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}x}{4}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{5}{4}(x^2 - \frac{1}{5}x) + \frac{9}{16} = \frac{5}{4}(x - \frac{1}{10})^2 + \frac{11}{20}$$

当 $x = \frac{1}{10}$ 时 $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$ 取得最小值 $\frac{11}{20}$.

【归纳总结】本题以向量为载体考察动点定值与在最值问题, 定值往往可以通过特殊点来判定, 也

可以用普通方法，建立坐标系，求点坐标求值。最值一般转换为二次函数求，或者均值不等式，计算量较大，考察综合运算能力。难点在于计算，难度较大。

三. 解答题：本大题共 5 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ ，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知

$$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2} \quad b = \sqrt{2}.$$

(I) 求 a 的值；

(II) 求 $\cos C$ 的值；

(III) 求 $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【思路分析】第 (I) 问用正弦定理即可求解，较为基础；第 (II) 问不仅需要正弦定理，还需要用余弦定理；第 (III) 问在前面求解的条件基础上，需要用两角差的正弦公式和正余弦的二倍角公式。

【解析】(河南洛阳刘友友老师解析)

(I) 由正弦定理得 $\sin A : \sin B = a : b = 2 : 1$ ， $b = \sqrt{2}$ ，所以 $a = 2\sqrt{2}$ 。

(II) 同 (I) 可得 $c = 2$ ，由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{4}$ ；

(III) $\cos C = \frac{3}{4} > 0$ ，则 $\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ， $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ ，

$$\cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C = 1 - 2 \times \frac{7}{16} = \frac{1}{8},$$

$$\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2C \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2C \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{21} - 1}{16}.$$

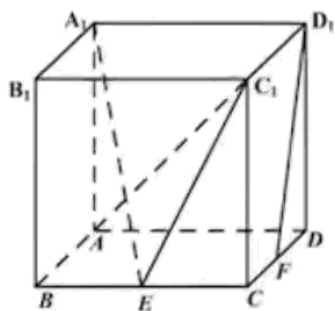
【归纳总结】本题看似简单，实则考查了解三角形的正弦定理、余弦定理，三角函数中的二倍角公式、两角差的正弦公式，可谓短小精悍。

17 (本小题满分 15 分) 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点，

(1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ；

(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角的正弦值；

(3) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值。



【思路分析】(1) 连接 A_1C_1, B_1D_1 相交于 O, 连接 OE, EF, 证明 $OE \parallel D_1F$ 即可；

(2) 以 A 为坐标原点，AB, AD, AA_1 为坐标轴建立空间直角坐标系，求出平面 A_1EC_1 的法向量即可；

(3) 求出平面 A_1AC_1 的法向量，结合 (2) 则可得到二面角。

【解析】(代尔宁老师解析) (1) 证明：如图所示，连接 A_1C_1, B_1D_1 相交于 O, 连接 OE, EF,

因为 E 为棱 BC 的中点, F 为棱 CD 的中点

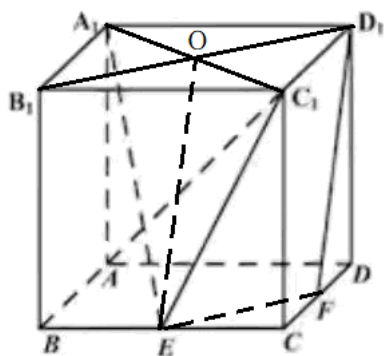
所以 $EF \parallel B_1D_1$ 且 $EF = \frac{1}{2} B_1D_1$

根据正方体有 $OD_1 = \frac{1}{2} B_1D_1$, 所以 $EF = OD_1$

所以四边形 $OEFD_1$ 为平行四边形, 所以 $OE \parallel D_1F$

又因为 $OE \subset$ 平面 A_1EC_1 , $D_1F \not\subset$ 平面 A_1EC_1

所以 $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ;



(2) 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 为坐标轴建立空间直角坐标系, 如图所示

则 $A(0,0,0), C_1(2,2,2), E(2,1,0), A_1(0,0,2)$

则 $\overrightarrow{A_1E} = (2,1,-2), \overrightarrow{EC_1} = (0,1,2), \overrightarrow{AC_1} = (2,2,2)$

设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{A_1E} \\ \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{EC_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \\ y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z_1 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = 1 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (2, -2, 1)$$

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\vec{n}_1| |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

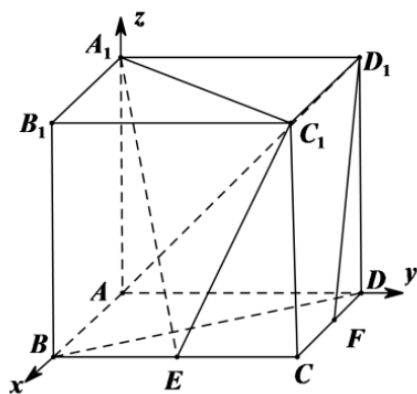
(3) 在 (2) 建立的空间直角坐标系中, 设平面 A_1AC_1 的法向量 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AA_1} \\ \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AC_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_2 = 0 \\ 2x_2 + 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } y_2 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{n}_2 = (-1, 1, 0)$$

设二面角 $A-A_1C_1-E$ 为 α , 根据 (2) 有

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-2-2}{3 \times \sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 所以 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$



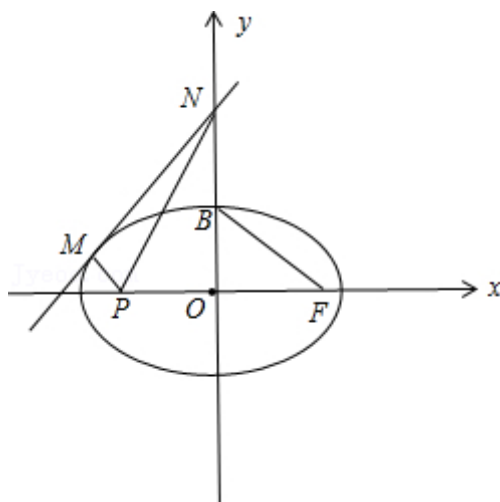
【归纳总结】本题考查空间立体几何中线面位置关系以及空间线面角，二面角的求解，由于本题有优良的建立空间直角坐标系的条件，所以直接借助坐标系解决即可。

18. (本小题满分 15 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，上顶点为 B ，离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，且 $|BF| = \sqrt{5}$ 。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M ，与 y 轴的正半轴交于点 N ，过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P ，若 $MP \parallel BF$ ，求直线 l 的方程

【思路分析】(1) 先由 $|BF|$ 的长求出 a ，再结合离心率求出 c ，根据 $b^2 = a^2 - c^2$ ，求出 b^2 ，即得椭圆方程。(2) 解法一：由题设直线 l 的方程，联立直线与椭圆的方程组，解得直线的求出点 N 坐标。根据直线 $NP \perp BF$ ，得直线 NP 方程。进而求出点 P 坐标，根据 $MP \parallel BF$ 建立 M 点横纵坐标间的关系，再联立 M 点横纵坐标的方程组，即可解得 M 点，从而解出直线 l 的方程；解法二：根据求导得直线 l 方程，根据点 M 求出点 P 坐标，根据 $NP \perp MP$ 列出点 M 横纵坐标间的关系，再联立点 M 横纵坐标的方程组，即可解得 M 点，从而解出直线 l 的方程；解法三：由题设直线 l 的方程，求出点 N 坐标。根据直线 $NP \perp BF$ ，得直线



NP 方程。进而求出点 P 坐标，根据 $MP \parallel BF$ 建立点 M 横纵坐标间的关系，再联立点 M 横纵坐标的方程组，即可解得 M 点，从而解出直线 l 的方程；

【解析】(郭倩老师解析) (1) 记半焦距为 c ，根据 $|BF| = \sqrt{OB^2 + OF^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ ，得 $a = \sqrt{5}$ ，由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，得 $c = 2$ ，所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$ ，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

(2) 解法一：(郭倩老师解析) 由题知直线联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{5} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 得

$$(1 + 5k^2)x^2 + 10kmx + 5m^2 - 5 = 0$$

因为直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M ，所以 $\Delta = 0$ ，化简得 $m^2 - 5k^2 - 1 = 0$ ①

由方程组 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x = 0, \end{cases}$ 解得 $y = m$ ，因此点 N 坐标为 $(0, m)$

因为 $B(0, 1)$, $F(2, 0)$ ，所以直线 BF 的斜率为 $\frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 NP 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P ，所以 $NP \perp BF$ ，

根据两直线垂直斜率之积为 -1 ，可得直线 NP 斜率为 2 ，

因为 $N(0, m)$ ，所以直线 NP 方程为 $y = 2x + m$ ，因为直线 NP 交 x 轴于点 P ，

由方程组 $\begin{cases} y = 2x + m, \\ y = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -\frac{m}{2}$ ，因此点 P 坐标为 $(-\frac{m}{2}, 0)$ ，

因为 $MP \parallel BF$ ，所以直线 MP 与直线 BF 的斜率相等，所以直线 MP 的斜率为 $-\frac{1}{2}$ ，

直线 MP 方程为 $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{m}{2}\right)$

联立方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{m}{2}\right), \\ y = kx + m, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = -\frac{5m}{4k+2}, \\ y_0 = \frac{-km+2m}{4k+2}, \end{cases}$

因此点 M 坐标为 $(-\frac{5m}{4k+2}, \frac{-km+2m}{4k+2})$

将 M 点坐标代入椭圆方程得 $\frac{\left(-\frac{5m}{4k+2}\right)^2}{5} + \left(\frac{-km+2m}{4k+2}\right)^2 = 1$ ②

①②解得 $\begin{cases} k = 1, \\ m = \sqrt{6}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = 1, \\ m = -\sqrt{6}, \end{cases}$ (因为直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N 舍去)

所以，直线 l 方程为 $y = x + \sqrt{6}$

解法二：(郭倩老师解析) 直线 l 与椭圆相切于点 M ，设 $M(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$)，

因为椭圆方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ ，则 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}$ ，

所以 $y' = -\frac{x}{5\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}}} = -\frac{x}{5y}$ ，直线 l 与椭圆相切于点 M

所以直线 l 方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{5y_0}(x - x_0)$ ①

因为点 N 在 y 轴的正半轴，所以设点 N 坐标为 $N(0, t)$

因为点 N 在直线 l 上，所以 $t - y_0 = \frac{x_0^2}{5y_0}$ ②

因为 $B(0, 1)$, $F(2, 0)$ ，所以直线 BF 的斜率为 $\frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P ，所以 $NP \perp BF$ ，

根据两直线垂直斜率之积为 -1 ，可得直线 NP 斜率为 2 ，

因为 $N(0, t)$, 所以直线 NP 方程为 $y = 2x + t$, 因为直线 NP 交 x 轴于点 P

由方程组 $\begin{cases} y = 2x + t, \\ y = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -\frac{t}{2}$, 因此点 P 坐标为 $\left(-\frac{t}{2}, 0\right)$

因为 $MP \parallel BF$, $NP \perp BF$, 所以 $NP \perp MP$

NP 与 MP 垂直, 所以 $\overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{MP}$, 因为 $\overrightarrow{NP} = \left(-\frac{t}{2}, -t\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(x_0 + \frac{t}{2}, y_0\right)$

所以 $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, 化简得 $t = -2x_0 - 4y_0$ ③

将③代入②化简得 $x_0 = -5y_0$ ④, 点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆上满足 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$ ⑤

$$\text{联立④⑤得} \begin{cases} x_0 = -\frac{5\sqrt{6}}{6}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

所以, 直线 l 方程为 $y = x + \sqrt{6}$

解法三: (郭倩老师解析) 直线 l 与椭圆相切于点 M , 设 $M(x_0, y_0) (y_0 > 0)$, 则 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$,

则直线 l 方程为 $\frac{x_0}{5}x + y_0y = 1$, 因为直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N ,

由方程组 $\begin{cases} \frac{x_0}{5}x + y_0y = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ 解得 $y = \frac{1}{y_0}$, 因此点 N 坐标为 $\left(0, \frac{1}{y_0}\right)$

因为 $B(0, 1)$, $F(2, 0)$, 所以直线 BF 的斜率为 $\frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$,

因为 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P , 所以 $NP \perp BF$,

根据两直线垂直斜率之积为 -1 , 可得直线 NP 斜率为 2 ,

因为 $N\left(0, \frac{1}{y_0}\right)$, 所以直线 NP 方程为 $y = 2x + \frac{1}{y_0}$, 因为直线 NP 交 x 轴于点 P

由方程组 $\begin{cases} y = 2x + \frac{1}{y_0}, \\ y = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -\frac{1}{2y_0}$, 因此点 P 坐标为 $\left(-\frac{1}{2y_0}, 0\right)$

因为 $MP \parallel BF$, 所以直线 MP 与直线 BF 的斜率相等

直线 MP 的斜率为 $\frac{y_0 - 0}{x_0 - \left(-\frac{1}{2y_0}\right)} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{1}{2y_0}}$, 直线 BF 的斜率为 $-\frac{1}{2}$

所以 $\frac{y_0}{x_0 + \frac{1}{2y_0}} = -\frac{1}{2}$, 整理得 $2x_0y_0 + 4y_0^2 + 1 = 0$, 化简得 $x_0 = \frac{-4y_0^2 - 1}{2y_0}$ ①

因为点 $M(x_0, y_0)$ 满足 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$ ②, 联立①②解得 $\begin{cases} x_0 = -\frac{5\sqrt{6}}{6}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$

所以, 直线 l 方程为 $y = x + \sqrt{6}$

【归纳总结】解决直线与椭圆的位置关系问题, 首先要适当设直线的方程, 进而求出相应点的坐标, 根据题中几何关系联立方程或方程组求解.

19. (本题满分15分) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列, 其前8项的和为64. $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列, $b_1 = 4$, $b_3 - b_2 = 48$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in N^*$.

(i) 证明 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列; (ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$.

【思路分析】本题主要考查等差、等比数列的求和以及数列的综合应用.

(I) 根据题中已知条件, 利用公式求出数列的通项公式.

(II) 根据 $\{c_n\}$ 的定义将 (I) 所求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 代入 c_n ,

(i) 根据 $\{c_n\}$ 的通项公式求出 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 的通项公式, 根据等比数列的定义判断 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 设 $t_n = \sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}}}$, $\{t_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 则可将其放缩得到 $t_n < \sqrt{2} \cdot \frac{n}{2^n}$, 再构造数列 $r_n = \frac{n}{2^n}$,

$n \in N^*$, 利用错位相减法求出 $\{r_n\}$ 的前 n 项和 R_n , 可以判断出 $R_n < 2$. 从而得到

$$T_n < \sqrt{2} \cdot R_n < 2\sqrt{2}.$$

【解析】: (辽宁沈阳贺雷颖老师解析) (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$.

由题意得 $d = 2, S_8 = 64$, 根据等差数列前 n 项和公式得 $S_8 = 8a_1 + 28d = 64$,

整理得 $2a_1 + 7d = 16$ ①, 将 $d = 2$ 代入①得, $a_1 = 1$, $\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1, n \in N^*$.

根据题中 $b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48$, 由等比数列通项公式得, $b_1 q^2 - b_1 q = 48$ ②, 将 $b_1 = 4$ 代入②得, $4q^2 - 4q = 48$, 化简得 $q^2 - q - 12 = 0$, 即 $(q-4)(q+3) = 0$, $\therefore q = 4$ 或 $q = -3$

$\because q > 0, \therefore q = 4$, 根据等比数列通项公式得 $b_n = 4^n, n \in N^*$.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1, n \in N^*$; $\{b_n\}$ 的通项公式为: $b_n = 4^n, n \in N^*$.

(II) 由 (I) 得 $a_n = 2n-1, b_n = 4^n, n \in N^*, \therefore c_n = 4^{2n} + \frac{1}{4^n}, n \in N^*$,

$$(i) c_n^2 - c_{2n} = \left(4^{2n} + \frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(4^{4n} + \frac{1}{4^{2n}}\right) = 4^{4n} + 2 \cdot 4^n + \frac{1}{4^{2n}} - 4^{4n} - \frac{1}{4^{2n}} = 2 \cdot 4^n, n \in N^*.$$

$$\therefore c_{n+1}^2 - c_{2(n+1)} = 2 \cdot 4^{n+1}, \therefore \frac{c_{n+1}^2 - c_{2(n+1)}}{c_n^2 - c_{2n}} = 4 \text{ (常数)},$$

因为 $c_1^2 - c_2 = \left(4^2 + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(4^4 + \frac{1}{4^2}\right) = 8, \therefore \{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是以8为首项,

4为公比的等比数列.

(ii) 设 $t_n = \sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}}}$, $\{t_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$\therefore t_n = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4^n}} = \sqrt{\frac{4n^2-1}{2 \cdot 4^n}},$$

$$\therefore t_n = \sqrt{\frac{4n^2-1}{2 \cdot 4^n}} < \sqrt{\frac{4n^2}{2 \cdot 4^n}} = \sqrt{2} \cdot \frac{n}{2^n}, n \in N^*.$$

设 $r_n = \frac{n}{2^n}$, $n \in N^*$. 设 $\{r_n\}$ 的前 n 项和为 R_n .

则 $R_n = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r_n$

$$\therefore R_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad ③$$

$$\therefore \frac{1}{2} R_n = 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad ④$$

$$③ - ④ \text{ 得 } \frac{1}{2} R_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} R_n = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore R_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}, n \in N^*.$$

$$\because n \in N^*, \therefore \frac{n+2}{2^n} > 0, \therefore R_n < 2.$$

$$\therefore T_n < \sqrt{2} R_n < 2\sqrt{2}, \text{ 即 } \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}.$$

【归纳总结】(1) 等差数列、等比数列的通项公式在求解过程中要灵活运用公式;

(2) 证明数列是等差数列或是等比数列的证明方法, 首选定义法, 要注意明确首项和公差或公比;

(3) 在运用错位相减法数列求和时要注意适用范围及错位相减法的解题技巧;

(4) 在数列中要理解并学会运用适当利用放缩法求解;

(5) 在求解复杂式子的时候要学会化繁为简.

20. (本小题满分 16 分) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - x \cdot e^x$.

(4) 求函数 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切点的方程;

(5) 证明 $f(x)$ 存在唯一极值点;

(6) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对于任意的 $x \in R$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

【思路分析】本题主要考查导数的概念及其几何意义、导数的计算以及导数在研究函数中的应用.

【解析】: (张英杰老师解析) (1) $f(0) = 0$, $f'(x) = a - (x+1)e^x$, 所以 $f'(0) = a - 1$, 所以函数在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为: $(a-1)x - y = 0$.

(2) 若证明 $f(x)$ 仅有一个极值点, 即证 $f'(x) = a - (x+1)e^x = 0$, 只有一个解,

即证 $a = (x+1)e^x$ 只有一个解,

令 $g(x) = (x+1)e^x$, 只需证 $g(x) = (x+1)e^x$ 的图像与直线 $y = a (a > 0)$ 仅有一个交点,

$g'(x) = (x+2)e^x$,

当 $x = -2$ 时, $g'(x) = 0$,

当 $x < -2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

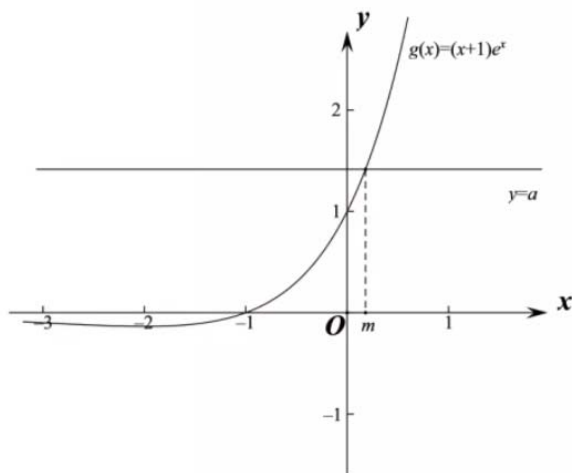
当 $x > -2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x = -2$ 时, $g(-2) = -e^{-2} < 0$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0^-$,

画出函数 $g(x) = (x+1)e^x$ 图形大致如下:



因为 $a > 0$, 所以 $g(x) = (x+1)e^x$ 的图像与直线 $y = a (a > 0)$ 仅有一个交点.

(3) 由题意可得, 存在 $a \in (0, +\infty)$, 使得 $ax - x \cdot e^x \leq a + b$ 对于任意的 $x \in R$ 恒成立,

即存在存在 $a \in (0, +\infty)$, 使得 $-b \leq xe^x + a(1-x)$ 对于任意的 $x \in R$ 恒成立,

令 $h(x) = xe^x + a(1-x)$, 即存在 $a \in (0, +\infty)$, $-b \leq h(x)_{\min}$,

$h'(x) = (x+1)e^x - a$, $h''(x) = (x+2)e^x$.

由(2)得 $x < -2$ 时, $h'(x) < 0$, 单调递减, $x > -2$ 时单调递增,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) \rightarrow +\infty$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h'(x) < 0$,

所以存在 $x = x_0 (x_0 > -2)$, 使得函数 $h'(x_0) = (x_0 + 1)e^{x_0} - a = 0$,

即 $(x_0 + 1)e^{x_0} = a$,

当 $x < x_0$ 时 $h(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时 $h(x)$ 单调递增

当 $x = x_0$ 时, $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} + a(1-x_0) = (1-x_0^2 + x_0)e^{x_0}$

$h'(x_0) = (-x_0^2 - x_0 + 2)e^{x_0} = -(x_0 + 2)(x_0 - 1)e^{x_0}$,

当 $-2 < x_0 < 1$ 时, $h'(x_0) > 0$, 则 $h(x_0)$ 单调递增,

当 $x_0 > 1$ 时, $h'(x_0) < 0$, 则 $h(x_0)$ 单调递减.

当 $x_0 = 1$ 时, $h(x_0)_{\max} = h(1) = e$,

因为存在 $a \in (0, +\infty)$, $-b \leq h(x_0)$, 即 $-b \leq h(x_0)_{\max}$ 即 $-b \leq e$

所以 b 的取值范围为 $[-e, +\infty)$.

【归纳总结】存在性问题: $\exists x \in D, f(x) < K$ 成立, 则 $f(x)_{\min} < K$.

《初高中数学教研微信系列群》简介:

目前有 15 个群 (13 个高中群, 2 个初中群), 共 5000 多优秀、特、



高级教师，省、市、区县教研员、教辅公司数学编辑、报刊杂志高中数学编辑等汇聚而成，是一个围绕高中数学教学研究展开教研活动的微信群。

宗旨：脚踏实地、不口号、不花哨、接地气的高中数学教研！

特别说明：

- 1.本系列群只探讨高中数学教学研究、高中数学试题研究等相关话题；
- 2.由于本群是集“研究—写作—发表（出版）”于一体的“桥梁”，涉及业务合作，特强调真诚交流，入群后立即群名片：

教师格式：省+市+真实姓名，如：四川成都张三

编辑格式：公司或者刊物（简写）+真实姓名

欢迎各位老师邀请你身边热爱高中数学教研（不喜欢研究的谢绝）的教师好友（学生谢绝）加入，大家共同研究，共同提高！

群主二维码：见右图
