关于含绝对值函数的双重最值问题的研究

童益民

（宁波效实中学 315012）

含绝对值的函数是高考中的一个考点，含绝对值函数的最大值问题是近年高考的热点，而含绝对值函数的最大值的最小值问题更是高考中的一个难点，如 2015 年浙江高考理科第 18 题，2016 年天津高考理科第 20 题. 本文通过对含绝对值的二次、三次函数的思考研究，得到一般的几个结论，以供读者参考.

思考 1 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，研究当 $f(x)$ 满足什么条件时，M 取到最小值？

分析：因为

$$\begin{cases}M\geqslant|f(\alpha)|=|\alpha^2+b\alpha+c|\\ M\geqslant|f(\beta)|=|\beta^2+b\beta+c|\\ M\geqslant\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|=\left|\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b\frac{\alpha+\beta}{2}+c\right|\end{cases},$$

所以 $4M\geqslant|f(\alpha)|+|f(\beta)|+2\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|$

$$\geqslant\left|f(\alpha)+f(\beta)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|$$

$$=\left|(\alpha^2+b\alpha+c)+(\beta^2+b\beta+c)-2\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+b\frac{\alpha+\beta}{2}+c\right)\right|$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)^2}{2},$$

所以 $M\geqslant\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}$,

当 $f(\alpha)=f(\beta)=-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

即 $b=-(\alpha+\beta),c=\frac{\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta}{8}$ 时等号成立

所以 M 的最小值为 $\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}$.

结论 1 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$，当 $f(\alpha)=f(\beta)=-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值 $\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}$.

说明：对于函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ $(x\in[\alpha,\beta])$，当 $f(\alpha)=f(\beta)=-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值，其实是取了 $f(x)$ 的定义域的两个端点和一个极值点，它们的函数值正负间隔，绝对值相等，此时 $|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值.

接下来进行类比.

思考 2 已知函数 $f(x)=x^3+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ $(\alpha<0<\beta)$，其中 $\alpha+\beta=0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，研究当 $f(x)$ 满足什么条件时，M 取到最小值？

分析：(1) 当 $b\geqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调递增，显然当 $-f(\alpha)=f(\beta)$，即 $c=0$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值 $\beta^3+b\beta$.

(2) 当 $b<0$ 时，

①若 $c=0$，

$$f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3+b\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=2\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$f(\beta)=\beta^3+b\beta,$$

所以 $M_{\min}=\left(\max\left\{f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right),|f(\beta)|\right\}\right)_{\min}$,

令 $\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=t$,

则 $f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=2t^3$，$|f(\beta)|=|\beta^3-3\beta t^2|$,

画出关于 t 的函数 $g(t)=2t^3$，$h(t)=|\beta^3-3\beta t^2|$ 的图像，如图 1，

当 $t=t_0$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 的最小值为

$$g(t_0)=2t_0^3=h(t_0)=\beta^3-3\beta t_0^2.$$

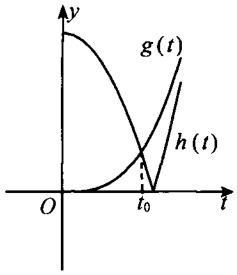

图 1

②若 $c>0$，

$$f\left[-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right]=\left[-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right]^3+b\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)+c$$

$$=2\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+c,$$

$$f(\beta)=\beta^3+b\beta+c,$$

所以 $M_{\min}=\left(\max\left\{f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right),|f(\beta)|\right\}\right)_{\min}$，

令 $\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=t$，

则 $f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=2t^3+c$，$|f(\beta)|=|\beta^3-3\beta t^2+c|$，

画出关于 t 的函数 $g(t)=2t^3+c$，$h(t)=|\beta^3-3\beta t^2+c|$ 的图像，如图 2，

当 $t=t_0$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 的最小值为

$$g(t_0)=2t_0^3+c>2t_0^3,$$

舍去.

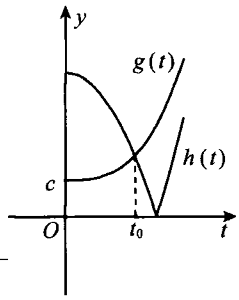

图 2

③若 $c<0$，

$$f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3+b\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)+c=-2\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+c,$$

$$f(\alpha)=\alpha^3+b\alpha+c,$$

所以 $M_{\min}=\left(\max\left\{\left|f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)\right|,|f(\alpha)|\right\}\right)_{\min}$，

令 $\left(-\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=t$，

则 $\left|f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)\right|=|-2t^3+c|=2t^3-c$，

$$|f(\alpha)|=|\alpha^3-3\alpha t^2+c|=|\beta^3-3\beta t^2-c|,$$

画出关于 t 的函数 $g(t)=2t^3-c$，$h(t)=|\beta^3-3\beta t^2-c|$ 的图像，如图 3，

当 $t=t_0$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 的最小值为

$$g(t_0)=2t_0^3-c>2t_0^3,$$

舍去. 由①②③得，

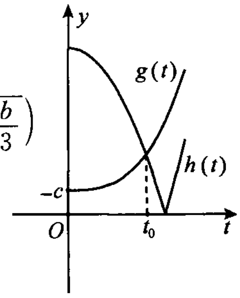

图 3

当 $-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=-f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$ 时，

$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值 $\beta^3+b\beta$.

综上(1)(2)得，

当 $-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=-f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值.

结论 2 已知函数 $f(x)=x^3+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $[\alpha,\beta](\alpha<0<\beta)$，其中 $\alpha+\beta=0$，当 $-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=-f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值.

说明：对于函数 $f(x)=x^3+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ $(x\in[\alpha,\beta]$，其中 $\alpha<0<\beta,\alpha+\beta=0)$，当 $-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=-f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$ 时，$|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值，其实也是取了 $f(x)$ 的定义域的两个端点和两个极值点，它们的函数值正负间隔，绝对值相等，当 $-f(\alpha)=f(\beta)$ 时，可得 $c=0$，当 $f(\beta)=f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$ 时，可求出 b 值，此时 $|f(x)|$ 的最大值 M 取到最小值.

再进一步推广.

思考 3 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，研究当 $f(x)$ 满足什么条件时，M 取到最小值？

分析：(1)取 $a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$，

即 $-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$ 时，

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c,$$

令 $x+\frac{a}{3}=t\in\left[\alpha+\frac{a}{3},\beta+\frac{a}{3}\right]$，

令 $u(t)=t^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)t+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$，

因为$-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$,所以$\left(\alpha+\frac{a}{3}\right)+\left(\beta+\frac{a}{3}\right)=0$,

根据结论 2,可得,

当$-u\left(\alpha+\frac{a}{3}\right)=u\left(\beta+\frac{a}{3}\right)=u\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}\right)$

$=-u\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}\right)$时,

$|u(t)|$的最大值M取到最小值,

即当$-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$

$=-f\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$时,

$|f(x)|$ 的最大值M取到最小值.

令此时的$a=a_0=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$,$b=b_0$,$c=c_0$,

函数记为$f_0(x)=x^3+a_0x^2+b_0x+c_0$,

$|f(x)|$的最大值M取到最小值M_0.

(2)取$a\neq-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$,即$a\neq a_0$时,

任取$a=a_1\neq a_0$,$b=b_1$,$c=c_1$,

令$f_1(x)=x^3+a_1x^2+b_1x+c_1$,

则$f_1(x)=x^3+a_0x^2+b_0x+c_0+(a_1-a_0)x^2+(b_1-b_0)x+(c_1-c_0)$

$=f_0(x)+(a_1-a_0)x^2+(b_1-b_0)x+(c_1-c_0)$,

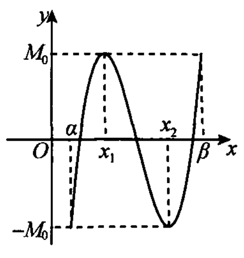

图 4

令$g(x)=(a_1-a_0)x^2+(b_1-b_0)x+(c_1-c_0)$,

所以$f_1(x)=f_0(x)+g(x)$,

因为函数$f_0(x)$的图像如图 4,

要使得函数$|f_1(x)|$的最大值小于等于M_0,

则必须$\begin{cases}g(\alpha)\geqslant 0\\ g(x_1)\leqslant 0\\ g(x_2)\geqslant 0\\ g(\beta)\leqslant 0\end{cases}$,

因为二次函数$g(x)$的二次项系数$a_1-a_0\neq 0$,显然是不成立的,

所以函数$|f_1(x)|$的最大值大于M_0,

所以对任意的$a\neq-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$,

$|f(x)|$的最大值M的最小值都大于M_0.

综上(1)(2)得,

当$-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$,

且$-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$

$=-f\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$时,

$|f(x)|$的最大值M取到最小值.

结论 3　已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$的定义域为$[\alpha,\beta]$,当$-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$,且$-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)=-f\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$时,$|f(x)|$的最大值$M$取到最小值.

说明:对于函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})(x\in[\alpha,\beta])$,当$-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$,且$-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)=-f\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$时,$|f(x)|$的最大值$M$取到最小值,其实也是取了$f(x)$的定义域的两个端点和两个极值点,它们的函数值正负间隔,绝对值相等时,即当$-\frac{2}{3}a=\alpha+\beta$,且$-f(\alpha)=f(\beta)=f\left(-\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)=-f\left(\sqrt{\frac{a^2-3b}{9}}-\frac{a}{3}\right)$时,$|f(x)|$的最大值$M$取到最小值.

对于以上得到的三个结论,可以帮助我们在解此类题目时有一个整体的认识,可以灵活应用,同时也为用绝对值不等式解此类题时,取什么特殊值提供了方向,就是考虑区间的端点和极值点.以下两题仅供参考.

题 1　已知函数$f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$的定义域为$[0,2]$,记$|f(x)|$的最大值为$M$,求$M$的最小值.

解析:当$f(0)=f(2)$时,$f(x)$的极值点为$x=1$,可考虑取$x=0,2,1$.　(下转第 55 页)

移到与椭圆相切(切点为 P)时点 C 到直线 OB 距离最大.设动直线方程为 $y=\frac{3}{2}x+t$,利用 Δ 法求切线方程,求出点 C 到 OB 的最大值,$S_{\triangle OBC}$ 最大值可以求得.

评析　上述四种中哪种方案运算更合理呢?因为△OBC 中 O,C 是定点,面积表征,显然是思路三和思路四更合理一些.

教学启示　解析几何的本质是几何,图形是几何的直观表现形式,是问题的出发点和归宿点,而代数方法仅仅是工具,审视图形的整体结构,看穿图形的本质特征,就能化繁为简.

3　结语

高中数学教学活动要树立以发展学生数学核心素养为导向的教学意识,创设有利于学生数学核心素养发展的情境,引导学生把握数学知识的本质.就解析几何的教学而言,由于其学科本质是运用代数方法解决几何问题,能灵活地进行数与形的有机结合与相互转化,通过运用不同的视角探索解题的途径、优化运算的过程来提升和发展学生的运算素养是我们在教学中需要着力解决的问题.2017 版高中数学课程标准对解析几何的“学业要求”是:依据问题情境分析几何问题和图形特点;依据几何问题和图形特点,探索解决问题思路;依据几何问题特点将几何问题转化为代数问题;运用代数方法推演结果并给出合理地几何解释.在解析几何教学中始终坚守学科大概念:用几何的眼光观察问题,借助几何图形的特点,形成解决问题思路,通过直观想象和代数运算得到结果,给出几何解释,解决问题,在这个过程中提高学生的思维品质,发展学生的关键能力,提升学生的运算素养,将数学核心素养的培养落到实处.

参考文献

[1] 章建跃.解析几何的思维方式与核心素养[J].中小学数学,2018(12):65

[2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:45

[3]张培强.用轨迹思想解 2018 年高考题[J].中学数学月刊,2018(12):48－50

(上接第 51 页)

因为$\begin{cases}M\geqslant|f(0)|=|c|\\M\geqslant|f(2)|=|4+2b+c|,\\M\geqslant|f(1)|=|1+b+c|\end{cases}$

$$\begin{aligned}所以\ 4M&\geqslant|f(0)|+|f(2)|+2|f(1)|\\&\geqslant|f(0)+f(2)-2f(1)|\\&=|c+4+2b+c-2-2b-2c|=2,\end{aligned}$$

所以 $M\geqslant\frac{1}{2}$.(当 $f(0)=f(2)=-f(1)$,即 $b=-2$,$c=\frac{1}{2}$时等号成立)

所以 M 的最小值为$\frac{1}{2}$.

题 2　设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$,$x\in\mathbf{R}$.其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

(1)(2)略;(3)设 $a>0$,函数 $g(x)=|f(x)|$,求证:$g(x)$ 在区间$[0,2]$上的最大值不小于$\frac{1}{4}$.

(选自 2016 年天津市高考理科第 20 题)

解析:设 $x-1=t\in[-1,1]$,

则 $h(t)=t^3-at-a-b$,根据结论 2,

当 $-h(-1)=h(1)=h(-\sqrt{\frac{a}{3}})=-h(\sqrt{\frac{a}{3}})$时,

$|h(t)|$的最大值取到最小值.

由 $-h(-1)=h(1)$,得 $-a-b=0$,

再由 $h(1)=1-a=h\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3+a\sqrt{\frac{a}{3}}$,

得 $a=\frac{3}{4}$,

所以当 $a=\frac{3}{4}$,$b=-\frac{3}{4}$时,

$|h(t)|$的最大值取到最小值$\frac{1}{4}$,

即 $g(x)$在区间$[0,2]$上的最大值不小于$\frac{1}{4}$.