江苏省仪征中学 2019 届高三年级下学期 3 月份冲刺二模热身训练 1

班级__________姓名__________学号__________日期__________

一、填空题：

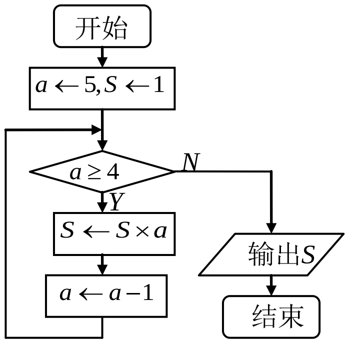
1.已知集合 $A=\{-1,1,3\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $A\cup B=$________.

2.已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{2+i}{1-i}$，则 $|z|=$________.

3.某校高一、高二、高三学生共有 3200 名，其中高三 800 名，如果通过分层抽样的方法从全体学生中抽取一个 160 人的样本，那么应当从高三的学生抽取的人数是________.

4.双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两条渐近线的方程为______________.

5.如图所示的流程图的运行结果是______.



第 5 题图

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(2+x-x^2)}{|x|+x}$ 的定义域为______.

7. 某路口一红绿灯东西方向的红灯时间为 45s，黄灯时间为 3s，绿灯时间为 60s．从西向东行驶的一辆公交车通过该路口，遇到红灯的概率为___________.

8.已知 $\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})\sin(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4})$，则 $\tan 2\alpha=$________.

9. 已知正三棱柱底面边长是 2,，外接球的表面积是 16π，则该三棱柱的侧棱长________.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$\cos B=-\dfrac{7}{18}$．若以 A，B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$________.

11. 在 ΔABC 中，$4\sin A+2\cos B=1$，$4\cos A+2\sin B=3\sqrt{3}$，则角 C 的大小为____.

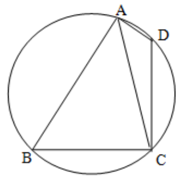
12. 若对于任意实数 u,v，不等式 $(u+5-2v)^2+(u-v^2)^2\geqslant t^2\ (t>0)$ 恒成立，则 t 的最大值为______.

二、解答题：

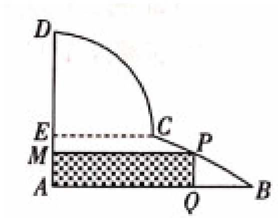
1. 如图，在圆内接ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足$a\cos C+c\cos A=2b\cos B$.

（1）求$\angle B$的大小；

（2）若点D是劣弧AC上一点，$AB=3,BC=2,AD=1$，求四边形$ABCD$的面积.



2. 如图所示，有一块镀锌铁皮材料$ABCD$，其边界AB，AD是两条线段，$AB=4$米，$AD=3$米，且$AD\perp AB$. 边界CB是以AD为对称轴的一条抛物线的一部分；边界CD是以点E为圆心，$EC=2$米为半径的一段圆弧，其中点E在线段AD上，且$CE\perp AD$. 现在要从这块镀锌铁皮材料$ABCD$中裁剪出一个矩形$PQAM$（其中点P在边界BCD上，点M在线段AD上，点Q在线段AB上），并将该矩形$PQAM$作为一个以PQ为母线的圆柱的侧面，记该圆柱的体积为V（单位：立方米）.



（1）若点P在边界BC上，求圆柱体积V的最大值；

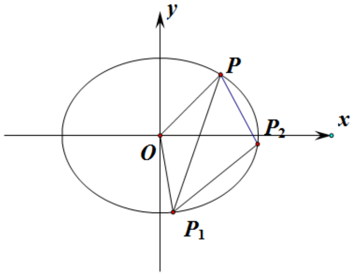
（2）如何裁剪可使圆柱的体积V最大？并求出该最大值.

3. 在平面直角坐标系xOy中，椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$长轴长为4, $P(1,\frac{3}{2}$）为椭圆E上一点，且P_1，P_2为椭圆E上的两个动点.

(1) 求椭圆E的标准方程;

(2) 求P_1点到直线OP距离的最大值, 及取最大值时P_1的坐标;

(3) 椭圆E上是否存在P_1、P_2 ，使得直线OP与P_1P_2平行且直线PP_1, PP_2斜率互为相反数? 并说明理由.



三、附加题：

1. 变换T_1是逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$的旋转变换，对应的变换矩阵是M_1；变换T_2对应用的变换矩阵是$M_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 求函数$y=x^2$的图象依次在$T_1$，$T_2$变换的作用下所得曲线的方程.

2. 在极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in R)$，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sin\alpha\\y=1-\cos 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），求直线 l 与曲线 C 交点 P 的直角坐标.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知焦点为 F 的抛物线 $x^2=4y$ 上有两个动点 A、B，且满足 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设两切线的交点为 M.

（1）求：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值；

（2）证明：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值.

江苏省仪征中学2019届高三年级下学期3月份冲刺二模热身训练1答案：

一、填空题：

1. $\{-1,1,3,5\}$ 2. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 3. 40 4. $y=\pm\frac{3}{4}x$ 5. 20 6. $(0,2)$ 7. $\frac{5}{12}$

8. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 9. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 10. $\frac{3}{8}$ 11. $\frac{\pi}{6}$ 12. $2\sqrt{2}$

二、解答题

1.解（1）方法1

设外接圆的半径为R，则$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，代入得

$2R\sin A\cos C+2R\sin C\cos A=2\times 2R\sin B\cos B$， ……2分

即$\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$，所以$\sin B=2\sin B\cos B$.

因为$B\in(0，\pi)$，所以$\sin B\neq 0$，所以$\cos B=\frac{1}{2}$. …4分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. 5分

方法2

根据余弦定理，得$a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2b\cos B$， …2分

化简得$\cos B=\frac{1}{2}$. ……4分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. …5分

（2）在△ABC中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$

$=9+4-2\times 3\times 2\times\frac{1}{2}=7$，所以$AC=\sqrt{7}$. …7分

因为A，B，C，D四点共圆，所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$. ……8分

在△ACD中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$，代入得$7=1+CD^2-2CD\cdot(-\frac{1}{2})$，

所以$CD^2+CD-6=0$，解得$CD=2$或$CD=-3$（舍）. …12分

所以$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC+\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin\angle ADC$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ………..14分

2. 解：(1)以A为原点，AB所在的直线为x轴，AD所在的直线为y轴，建立直角坐标系.

由题意可得 $B(4,0)$,$C(2,1)$. 设边界 BC 所在的抛物线方程为 $y=ax^2+b$,则 $\begin{cases}16a+b=0\\4a+b=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{12}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$,

所以抛物线的方程为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{4}{3}$.

设点 $P(x_0,-\frac{1}{12}x_0^2+\frac{4}{3})$,则剪裁后圆柱的母线长 $PQ=-\frac{1}{12}x_0^2+\frac{4}{3}$,底面周长 $AQ=x_0$,$2\leqslant x_0<4$,所以 $V=\pi\cdot(\frac{x_0}{2\pi})^2\cdot(-\frac{1}{12}x_0^2+\frac{4}{3})=\frac{1}{48\pi}\cdot x_0^2\cdot(-x_0^2+16)\leqslant\frac{1}{48\pi}\cdot(\frac{x_0^2-x_0^2+16}{2})^2=\frac{4}{3\pi}$,当且仅当 $x_0^2=-x_0^2+16$,即 $x_0=2\sqrt{2}$ 时取等号,所以当点 P 在边界 BC 上时,圆柱体积 V 的最大值为 $\frac{4}{3\pi}$.

(2)当点 P 在圆弧 CD 上时,设 $\angle PEC=\alpha(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2})$,则 $PQ=2\sin\alpha+1$,$AQ=2\cos\alpha$,

所以 $V=\pi\cdot(\frac{2\cos\alpha}{2\pi})^2\cdot(2\sin\alpha+1)=\frac{\cos^2\alpha\cdot(2\sin\alpha+1)}{\pi}=\frac{(1-\sin^2\alpha)(2\sin\alpha+1)}{\pi}$.

令 $t=\sin\alpha$,$t\in[0,1)$,则 $V(t)=\frac{(1-t^2)(2t+1)}{\pi}=\frac{-2t^3-t^2+2t+1}{\pi}$,$t\in[0,1)$,

所以 $V'(t)=\frac{-6t^2-2t+2}{\pi}$,令 $V'(t)=0$,$t=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 或 $t=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$(舍去).

当 $t\in(0,\frac{-1+\sqrt{13}}{6})$ 时,$V'(t)>0$;当 $t\in(\frac{-1+\sqrt{13}}{6},1)$ 时,$V'(t)<0$.

当 $t=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 时,$V(t)$ 的最大值为 $\frac{35+13\sqrt{13}}{54\pi}$,此时 $AM=\frac{2+\sqrt{13}}{3}$,因为 $\frac{35+13\sqrt{13}}{54\pi}>\frac{4}{3\pi}$,

所以当 AM 的长为 $\frac{2+\sqrt{13}}{3}$ 米时剪裁,圆柱体积 V 取得最大值 $\frac{35+13\sqrt{13}}{54\pi}$ 立方米.

3. 解:(1)因为椭圆 E 长轴长为4,所以 $2a=4$, 得 $a=2$

又因为 $P(1,\frac{3}{2})$ 为椭圆 E 上一点. 所以 $\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$, 得 $b=\sqrt{3}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……2 分

(2)因为 $P(1,\frac{3}{2})$,所以 OP 直线方程为 $3x-2y=0$

设 $P_1(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$,$(0\le\alpha<2\pi)$

P_1 到 OP 直线的距离 $d=\frac{|6\cos\alpha-2\sqrt{3}\sin\alpha|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{3}\left|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})\right|}{\sqrt{13}}$

因为 $0\le\alpha<2\pi$,所以 $-\frac{\pi}{3}\le\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$, 所以 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 或 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$

即$\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$,或$\alpha=\dfrac{11\pi}{6}$时，d有最大值$\dfrac{4\sqrt{39}}{13}$，$P_1(-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 或$P_1(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$……10 分

(方法二) $P(1,\dfrac{3}{2})$，OP直线方程为$3x-2y=0$，设$L:3x-2y+m=0$

由$\begin{cases}3x-2y+m=0\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，化简整理得$16y^2-4my+m^2-36=0$

$\Delta=16m^2-64(m^2-36)$，令$\Delta=0$，得$m=\pm4\sqrt{3}$……6 分

OP直线方程为$3x-2y=0$，与$3x-2y+m=0$的距离$d_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

P_1到OP直线最大的距离$d=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ $P_1(-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 或$P_1(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$……10 分

（3）若存在P_1P_2满足条件，则$k_{P_1P_2}=k_{OP}=\dfrac{3}{2}$. 设$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，

设直线P_1P_2方程为:$y=\dfrac{3}{2}x+n$，由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+n\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，化简整理得$3x^2+3nx+n^2-3=0$

所以$x_1+x_2=-n,\ x_1x_2=\dfrac{n^2-3}{3}$……12 分

由 $k_{PP_1}+k_{PP_2}=0$,得 $\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=0$，即 $\dfrac{\frac{3}{2}x_1+n-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{\frac{3}{2}x_2+n-\frac{3}{2}}{x_2-1}=0$

即 $3+\dfrac{n}{x_1-1}+\dfrac{n}{x_2-1}=0$，$3+\dfrac{n(x_1+x_2)-2n}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=0$，则有$3+\dfrac{-n^2-2n}{\frac{n^2-3}{3}+n+1}=0$

得1=0，所以方程无解，故椭圆E上不存在P_1、P_2满足条件.……16 分

(方法二) 设$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，PP_1与PP_2斜率分别为k、$-k$

因此直线P_1P方程为$y-\dfrac{3}{2}=k(x-1)$,即$y=kx+(\dfrac{3}{2}-k)$

由$\begin{cases} y = kx + (\frac{3}{2} - k) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 化简整理得 $(4k^2+3)x^2 + (12k - 8k^2)x + 4k^2 - 12k - 3 = 0$

又因为$x_p = 1$,所以$x_1 = \frac{4k^2 - 12k - 3}{4k^2+3}$ 同理 $x_2 = \frac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$……12 分

$$k_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-kx_2 + \frac{3}{2} + k) - (kx_1 + \frac{3}{2} - k)}{x_2 - x_1} = \frac{-k(x_1 + x_2) + 2k}{x_2 - x_1} = \frac{-k\frac{8k^2-6}{4k^2+3} + 2k}{\frac{24k}{4k^2+3}} = \frac{1}{2}$$

而$k_{OP} = \frac{3}{2} \neq k_{P_1P_2}$,椭圆E上不存在$P_1$、$P_2$满足条件.……16 分

三、附加题：

1. 【解析】变换T_1是逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$的旋转变换则$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$..........................2 分

$M = M_2M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，设$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$是变换后图像上任一点，与之对应的变换前的点是$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$，

则$M\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，所以$\begin{cases} x_0 - y_0 = x \\ x_0 = y \end{cases}$，即$\begin{cases} x_0 = y \\ y_0 = y - x \end{cases}$，..................................7 分

又因为$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$在曲线$y = x^2$上，所求曲线的方程是$y - x = y^2$..........................10 分

2. 【解析】先将直线l的极坐标方程化为直角坐标方程： $y = \sqrt{3}x$，再将参数方程化为普通方程：$y = \frac{1}{2}x^2\ (x \in [-2,\ 2])$，注意参数取值范围，最后根据解方程组得 P 点的直角坐标

试题解析：解：直线l的普通方程为$y = \sqrt{3}x$，① ....3 分

曲线C的直角坐标方程为$y = \frac{1}{2}x^2\ (x \in [-2,\ 2])$，② ....6 分

联立①②解方程组得$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}, \\ y = 6. \end{cases}$

根据 x 的范围应舍去$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}, \\ y = 6, \end{cases}$ 故 P 点的直角坐标为(0，0). ....10 分

3. 解（1）：设$A(x_1, \frac{x_1^2}{4}), B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$ $\because$ 焦点 F（0,1）$\therefore$ $\overrightarrow{AF} = (-x_1, 1 - \frac{x_1^2}{4}), \overrightarrow{FB} = (x_2, \frac{x_2^2}{4} - 1)$

$\because \quad \overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB} \therefore \begin{cases} -x_1=\lambda x_2 \\ 1-\frac{x_1^2}{4}=\lambda(\frac{x_2^2}{4}-1) \end{cases}$ 消 λ 得 $x_1(\frac{x_2^2}{4}-1)+x_2(1-\frac{x_1^2}{4})=0$ 化简整理得

$(x_1-x_2)(\frac{x_1x_2}{4}+1)=0 \because x_1\neq x_2 \therefore x_1x_2=-4 \therefore y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=1$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$（定值）（4 分）

（2）抛物线方程为 $y=\frac{1}{4}x^2 \therefore y'=\frac{1}{2}x$

$\therefore$ 过抛物线 A、B 两点的切线方程分别为

$y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$ 和 $y=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$ 即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{x_1^2}{4}$ 和 $y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{x_2^2}{4}$

联立解出两切线交点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},-1\right)$,

$\therefore \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}.-2\right)\left(x_2-x_1,\frac{x_2^2-x_1^2}{4}\right)=\frac{x_2^2-x_1^2}{2}-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}=0$（定值）（10 分）.