第9练 指 数

1．(多选)下列说法错误的是(　　)

A．$-a$一定是负数

B．若$a<0$，则$\sqrt{(-a)^2}=-a$

C．若$a<0$，则$|a^2|=-a^2$

D．若$a<0$，则$\dfrac{a}{\sqrt{a^2}}=1$

答案　ACD

解析　$-a$不一定是负数，故A错误；若$a<0$，则$\sqrt{(-a)^2}=|-a|=-a$，故B正确；若$a<0$，则$|a^2|=a^2$，故C错误；若$a<0$，则$\dfrac{a}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{a}{|a|}=\dfrac{a}{-a}=-1$，故D错误．

2．若$\left(3-6x\right)^{-\frac{3}{2}}$有意义，则$x$的取值范围是(　　)

A．$x\in\mathbf{R}$　　B．$x\neq0.5$

C．$x>0.5$　　D．$x<0.5$

答案　D

解析　将分数指数幂化为根式，可知需满足$3-6x>0$，解得$x<0.5$.

3．由下面的两串有理指数幂逐渐逼近，可以得到的数为(　　)

(1)$2^{1.7}$，$2^{1.73}$，$2^{1.732}$，$2^{1.732\,0}$，$2^{1.732\,05}$，…

(2)$2^{1.8}$，$2^{1.74}$，$2^{1.733}$，$2^{1.732\,1}$，$2^{1.732\,06}$，…

A．$2^{1.7}$　　B．$2^{1.8}$

C．$2\sqrt{3}$　　D．4

答案　C

解析　$\sqrt{3}$的不足近似值为1.7,1.73,1.732,1.732 0，1.732 05，…；$\sqrt{3}$的过剩近似值为1.8,1.74,1.733,1.732 1，1.732 06，…；故由(1)(2)两串有理指数幂逼近得到的数为$2\sqrt{3}$.

4．设$x>0$，化简$(-xy)\cdot\left(6x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)\div\left(3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)$的结果是(　　)

A．$-18xy^2$　　B．$-18\,y^{\frac{4}{3}}$

C．$-2\,y^{\frac{4}{3}}$　　D．$-2xy^2$

答案　C

解析　$(-xy)\cdot\left(6x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)\div\left(3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)=-2x^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\cdot y^{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=-2y^{\frac{4}{3}}$.

5．已知集合 $A=\{-a,\sqrt{a^2},4\}$，$B=\left\{-\sqrt[3]{a^3},\frac{a}{|a|},2^b\right\}$，且 $A=B$，则 $a+b$ 等于(　　)

A．3　B．1　C．2　D．3 或－3

答案　A

6．计算 $64^{-\frac{2}{3}}$ 的值是________.

答案　$\frac{1}{16}$

解析　$64^{-\frac{2}{3}}=\left(2^6\right)^{-\frac{2}{3}}=2^{-4}=\frac{1}{16}$.

7．计算：(1) $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\sqrt[3]{a^{13}}}\ (a>0)=$________.

(2)若 $a>0$，且 $a^x=3$，$a^y=5$，则 $a^{\frac{x}{2}+2y}=$________.

答案　(1)1　(2)$25\sqrt{3}$

解析　(1)原式$=\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}}}\div\sqrt{a^{-\frac{7}{3}}a^{\frac{13}{3}}}=\sqrt[3]{a^3}\div\sqrt{a^2}=a\div a=1$.

(2) $a^{\frac{x}{2}+2y}=\left(a^x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^y)^2=3^{\frac{1}{2}}\cdot5^2=25\sqrt{3}$.

8．已知 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，则 $a^2+a^{-2}=$________；$a^2-a^{-2}=$________.

答案　47　$21\sqrt{5}$

解析　将 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方，得 $a+a^{-1}-2=5$，则 $a+a^{-1}=7$.

由 $a+a^{-1}=7$ 两边平方，得 $a^2+a^{-2}+2=49$，则 $a^2+a^{-2}=47$.

由 $a+a^{-1}=7$，得 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=7$，

$\therefore a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$(舍负)，

故 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=a-a^{-1}=3\sqrt{5}$，

$\therefore a^2-a^{-2}=(a-a^{-1})(a+a^{-1})$

$=3\sqrt{5}\times7=21\sqrt{5}$.

9．计算：$\left(124+22\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{6}}+16^{\frac{3}{4}}-2\times\left(8^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1}=$________.

答案　11

解析　原式$=\left(11+\sqrt{3}\right)^{2\times\frac{1}{2}}-3^{3\times\frac{1}{6}}+2^{4\times\frac{3}{4}}-2\times8^{-\frac{2}{3}\times(-1)}=11+\sqrt{3}-3^{\frac{1}{2}}+2\times2^{3\times\frac{2}{3}}=11+\sqrt{3}-\sqrt{3}+8-8=11$.

10．(1)计算：$0.25^{-\frac{1}{2}}-\left(-2\times2020^{0}\right)^{2}\times\left[\left(-2\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}+10(2-\sqrt{3})^{-1}-10\times3^{0.5}$；

(2)若 $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$，$b=(2-\sqrt{3})^{-1}$，求$(a+1)^{-2}+(b+1)^{-2}$的值．

解　(1) $0.25^{-\frac{1}{2}}-\left(-2\times2020^{0}\right)^{2}\times\left[\left(-2\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}+10(2-\sqrt{3})^{-1}-10\times3^{0.5}=\left[\left(0.5\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}-(-2\times1)^{2}\times(-2)^{-2}+10\times\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-10\times3^{\frac{1}{2}}=2-4\times\dfrac{1}{4}+10(2+\sqrt{3})-10\sqrt{3}=21$.

(2)∵$a=(2+\sqrt{3})^{-1}=2-\sqrt{3}$，$b=(2-\sqrt{3})^{-1}=2+\sqrt{3}$，

∴$(a+1)^{-2}+(b+1)^{-2}=(3-\sqrt{3})^{-2}+(3+\sqrt{3})^{-2}$

$=\dfrac{1}{12-6\sqrt{3}}+\dfrac{1}{12+6\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$.