核心素养:教学的第三条主线[①]

渠东剑

(南京市秦淮区教师发展中心 南京市高中数学渠东剑名师工作室 210002)

1 问题的提出

一般认为,数学教学有两条主线:知识主线与方法主线.其中知识主线是明线,即教学要突出知识发生发展的过程,体现知识的来龙去脉;方法主线是暗线,思想方法蕴藏于数学知识的发生发展过程之中,被誉为数学知识的精髓,数学的灵魂,需要教师挖掘、提炼并贯穿到知识的教学中去[1].当下,《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《课标》)提出了数学学科核心素养(以下简称核心素养),那么,它对教学实践将产生怎样的影响?它与原有的上述两条主线有何关系?或者说,在教学实践层面,我们应该如何去主动落实《课标》精神,努力发展学生的核心素养呢?

发展学生核心素养是课程总目标,一定意义下是长远目标.核心素养的养成是日积月累的结果,基于核心素养的教学需要整体设计、分步实施,[2]《课标》也倡导主题(单元)教学设计.但是,从另一个角度说,课堂是教学的主阵地,教学实施是通过具体的一课时一课时地去完成的.可以说课时教学是组成教学实施的基本单位.那么,就核心素养目标的达成而言,每一节课都应为形成和发展核心素养作出可能的贡献.这也就可以认为,每一课时都应该在核心素养的引导下,去实施教学.从而,探讨核心素养导向下的课时教学,无论是理论层面,还是就实践需求,无疑具有重要的意义.

基于此,就课时教学实践而言,本文拟在已有上述两主条线的基础上,探索核心素养下的课时教学,并将以"平面向量基本定理"的教学为例说明.笔者的观点是,核心素养是教学的第三条主线——素养眼线,起教学向导的作用.眼线,这里取"暗中侦察情况、必要时担任向导"之意(据《现代汉语词典(第6版)》).这样,就将形成数学教学的三条主线,并且三条主线之间的关系是,突出知识明线,看重方法暗线,看见素养眼线.

2 核心素养:教学的第三条主线

核心素养应当成为教学的第三条主线:教学的眼线.教学把准三条主线有两层涵义.第一,教学设计要高屋建瓴:以核心素养为导向,以思想方法为重点,以知识落实为载体.第二,教学实践要扎扎实实:以知识为根基,以思想方法为主干,以核心素养为目标.

2.1 从课程目标认识

根据课程目标,通过高中数学课程的学习,学生能获得发展所必需的"四基";进而,提高"四能",发展核心素养,终极目标或外在表现是"三会".形成和发展核心素养的本源是知识[3],不突出知识的教学,发展核心素养的目标终将落空.

反过来,"学科核心素养是学生通过学科学习而逐步形成的……"[4]核心素养综合地体现在"发现和提出问题、分析和解决问题"的过程中;提高"四能"离不开"四基",或者说"四能"是在"四基"的基础上发展起来的.例如,"发现问题"的能力,就要在情境中用"数学的眼光"去观察并发现问题,进而形成更高境界的"数学的眼光"、更高层次的"发现问题"的能力.这就是说,要形成和发展核心素养,就要落实"四基",进而提高"四能";落实"四基"就意味着要突出知识与思想方法,因为"四基"本身就包含基础知识、基本思想方法;甚至知识本身就蕴含着方法,脱离知识的所谓思想方

① 江苏省教育科学"十二·五"规划2015年度重点资助课题"高中学生数学推理的心理学实证研究"(B—a/2015/02/027)阶段成果.

法是不存在的.笔者试图以框图描述这三条主线与“课程”、“四基”、“四能”、核心素养与“三会”之间的关系,如图 1.

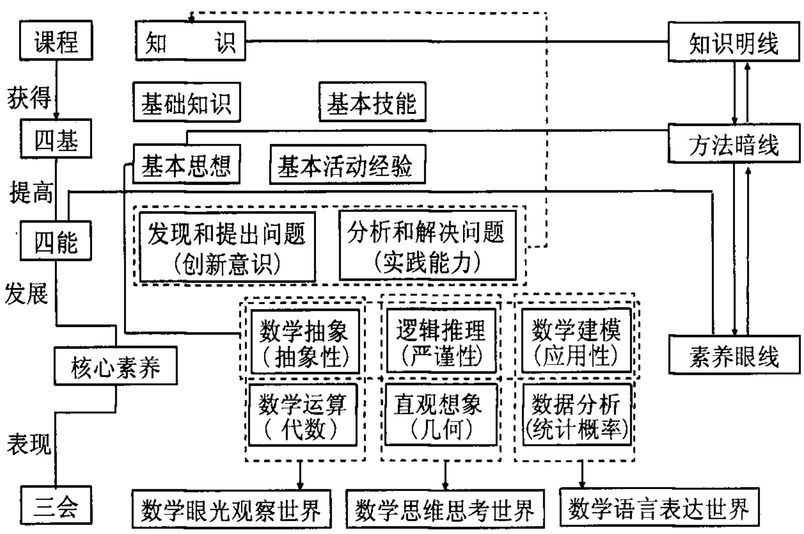

图 1 教学三条主线的关系

2.2 从知识与能力关系理解

综观知识与能力孰重孰轻的历史纷争,人们愈加认识到二者对立统一的关系,知识是生成能力的本源,已成为一个基本的命题.[3]首先,知识本身就包含陈述性知识与程序性知识,一定意义下,程序性知识就是思想方法;其次,由知识学习转化而来的能力,又将对知识的学习与运用,产生积极的促进作用;再次,这种由知识学习转化而来的能力,其实蕴含着思维习惯和方法,这其实就是核心素养.[2]所以,教学突出知识主线,以知识发生发展的过程为基本线索,是培养能力、落实核心素养目标所必须的.

2.3 从三主条线内涵去考量

其一,看见眼线,意味着核心素养应当成为教学的向导.相对于具体的、显现的知识与技能、思想与方法而言,核心素养处于更上位层次.它不仅包含知识技能、思想方法,还有情感、态度与价值观的内涵.看见眼线,就是要心中有核心素养目标,以核心素养为向导,去引领教学的实践.

其二,看重暗线,就是仍然要注重数学思想方法.知识是显性而具体的,蕴含在知识中的思想方法是数学的本质,也是数学育人的根本.一定意义下,数学思想方法既是核心素养的重要内容,又是发展核心素养的依托.因而,教学实践中应充分挖掘知识发生发展过程中的思想方法,并有意渗透到教学过程中去.这是每一节课都需要努力而为之的,而且要有高度的自觉与积极的主动性.

其三,突出明线,即突出知识的来龙去脉,突出知识发生发展的过程.教学要以知识为载体,以问题为导向,以解决问题为动力,以知识发生发展的逻辑过程为基本线索展开,使知识的教学,成为在教师的指导下,学生不断发现和提出问题、分析和解决问题的过程;使学生的学习成为数学再发现、再创造的过程,让知识从学生的头脑中自然流淌出来.

具体地,不断地发现和提出问题、分析和解决问题,就是要让课堂教学“问题结构”化:学习从问题情境开始,这个情境可以是生活情境、数学情境或科学情境;教学就是基于情境,启发学生发现并提出问题;面对提出的问题,就要分析与解决问题;解决后的问题,又成为新的情境,(这个情境大多属于数学情境)基于数学“进一步”研究的需要,又将提出新的问题;面对这个新的问题,又要分析与解决问题……这就是依托知识发生发展的线索,不断发现与提出问题、分析与解决问题的过程.进而,基于这样的教学过程,形成和发展学生的核心素养.

3 基于三条主线的教学设计举例

平面向量基本定理是“平面向量”中的一条重要定理,冠有“基本”二字,足见其基础性、发展性

与核心地位. 这里,将基于上述三条主线视角,分析教学内容、尝试设计教学,探索基于三条主线下的教学实践.

为叙述方便,这里先将平面向量基本定理抄录如下:

如果 e_1,e_2 是同一个平面内两个不共线的向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

3.1 基于三条主线的内容分析

3.1.1 知识主线

第一,分析教材"平面向量"知识发展的脉络. 平面向量基本定理位于向量的概念、向量的运算(加法、减法、数乘)之后 ,后续内容则是平面向量的坐标表示、坐标形式下的向量运算(加法、减法、数乘、数量积). 之前的平面向量用有向线段表示,其运算形式(例如向量加法的平行四边形法则)属于几何范畴. 也就是说,向量兼有数与形双重特征,但平面向量基本定理之前的内容侧重于几何特征背景下的研究. 即使是向量的数量积,也完全可以放在平面向量基本定理之前. 基于此,我们似乎可以更清楚地看出本章的知识发展脉络,如图 2:

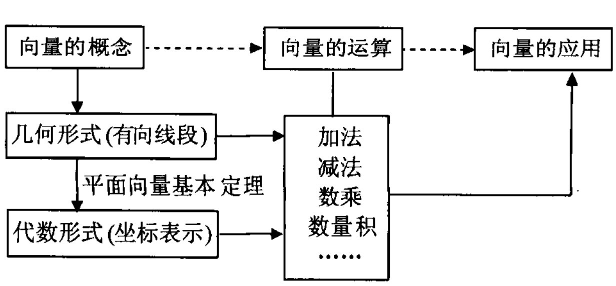

图 2 平面向量知识线路图

进而,寻求平面向量的代数形式,并基于代数形式研究其运算,(这正是数学研究代数对象的重要手段)就成为自然而必要的了. 显然,平面向量基本定理是探索其代数形式的基础. 在确定的一组基底之下,向量的本质就是有序实数对,这其实已经是仿射坐标的意义了. 从这一点来说,平面向量基本定理是探索向量代数形式表示、并基于代数形式研究平面向量运算的基础.

第二,一定意义下,向量共线定理的本质是,直线是一维的,研究了两个向量共线,也就同时研究了两个向量的不共线. 平面向量基本定理的本质是,平面是二维的. 若以基底"生长"的视角分析,$\{\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2\}$($\lambda_1$,$\lambda_2\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的向量)可以"生成"平面内的任一向量. 换言之,平面内的任意三个向量必线性相关. 由此说开去,空间向量基本定理表明空间是三维的,后续 n 维线性空间中的极大无关组……都可以看成向量共线定理、平面向量基本定理、空间向量基本定理的推广与发展. 所以,突出平面是二维的本质,是平面向量基本定理教学过程中所不容忽视的.

第三,在平面向量基本定理中,两个实数 λ_1,λ_2 有三个要素:一是存在,二是有序,三是唯一. 平面向量基本定理的探索过程可以分为两部分:一是基于平行四边形法则,将一个向量在两个方向(基底)上"分解";二是在分解后利用向量共线定理去探寻 λ_1,λ_2. 存在性可以从"作图"(几何分解)与应用向量共线定理的过程去理解,而唯一性似乎不容易做到严密论证——这里的几何作图过程,一定意义下是归纳推理,不可能穷尽所有情形,因而也就不能作为严密的推理过程.

基于此,教学中似乎应该让学生充分经历"作图"的过程,包括选择一些可能的情形去验证,比如向量 $\boldsymbol{a}$ 为零向量、与一个基向量共线,等等. 在作图实施分解的过程中达到心理认可,即这样的分解是可能的,有序实数对 λ_1,λ_2 是存在的;体验"分解"的结果应当是唯一的,也就是认同有序实数对 λ_1,λ_2 是唯一的. 让学生心理认同平面向量基本定理,也许就达到了教学要求.

3.1.2 方法主线

平面向量基本定理及其建立过程,蕴含了诸多数学思想方法,要在建构平面向量基本定理的教学过程中,也就是在知识发生发展的过程中,有意渗透,着力突出的.

其一,数形结合思想方法:平面向量基本定理的探索过程应该是依据平行四边形法则,从几何图形出发,得到在两个向量(基底)方向上的分解,这属于"形"的范畴;然后利用向量共线定理,得到有序实数对 λ_1,λ_2,这是数形结合的结果. 其二,化归转化思想方法:依据平面向量基本定理,在确定一组基底的条件下,平面内的任一向量都可以用这一组基底线性表示,而且表示是唯一的;在此意义下,平面内的所有向量,都可以转化为这一组基

底去研究.其三,有限与无限思想:用有限刻画无限,在平面向量基本定理的意义下,平面内任意两个向量之间的“差异”,本质上就是这一有序实数对的不同.其四,变与不变思想:当一组基底确定后,平面内的任一向量,(这是变化的)都可以唯一地由这两个向量(基底)线性表示,(这是不变的).其五,分类讨论思想方法:就探索平面向量基本定理的过程而言,针对“不同位置”的向量的分解,例如零向量与非零向量、与基底共线向量等,其中蕴含着分类讨论的思想方法.

3.1.3 素养主线

从学生学习角度,就平面向量基本定理的建构过程,主要体现出以下几种关键能力:数学建模、直观想象、逻辑推理.关键能力是核心素养的重要成分.进而可以认为,教学中应该注重提高这几种关键能力,事实上也就是在发展学生的核心素养[3].

(1)数学建模

平面向量基本定理可以认为是建立了平面向量表示的一种模型.将任一向量在两个方向(基底)上进行分解,依据的是平行四边形法则,这可谓是“用数学方法解决问题”.将这一过程理解为“数学建模”有积极意义:按李尚志教授观点,“……用现成公式加以变通解决不现成的问题,就是数学核心素养中的‘数学建模’”;[5]在认定其为“数学建模”基础上的教学,就要主动突出数学建模的过程,这对深化数学应用,培养创新意识,提高实践能力,进而发展其数学建模核心素养,将起到重要的积极的作用.

(2)直观想象

在建立平面向量基本定理的过程中,尤其是任一向量在两个方向(基底)上的分解,是通过几何图形、利用平行四边形法则进行的.其中有对“任一向量”的分类探究,得到统一的结论.这正是“借助几何直观……利用……图形……建立形与数的关系,构建数学问题的直观模型.”[4]所以,在本课过程中,充分利用几何图形,描述问题、直观理解、探索关系,是发展直观想象核心素养所需要的.

(3)逻辑推理

主要表现为两部分.一方面是通过分类讨论,就各种可能的情形进行推理:平面内任一向量都可以在两个方向(基底)上分解;这种分解的结果是唯一的.这个过程实质上是逻辑推理,但限于条件,不能给出严格的演绎推理证明.例如,除了依平行四边形法则分解,是否还有另外不同的分解途径,这些途径与此分解的结果是否相同,都不易给出严格证明.所以,从学生认知心理角度,这里的推理认定为合情推理似乎更恰当些.

另一方面,完成任一向量在两个方向(基底)上的分解后,利用向量共线定理证明这一有序实数对“存在且唯一”,则属于演绎推理了.这也是建立平面向量基本定理的基础.与此同时,也体现出了向量共线定理是平面向量基本定理的特例,即有序实数对中有一个数为 0;平面向量基本定理是向量共线定理的推广——一维到二维.

逻辑推理主要表现为:“……发现问题和提出问题,探索和表述论证过程……”[4]所以,在平面向量基本定理探索过程的教学中,要创设恰当情境,启发引导学生主动提出问题,利用图形探索,依据已有的向量共线定理进行推理,并尝试概括平面向量基本定理,达到较为充分的心理认可……为发展学生核心素养,做出可能的努力.

3.2 基于三条主线的课时教学设计(片断)

如前所述,教学应该突出三条主线,三条主线的关系是:突出知识主线,看重方法暗线,看见素养眼线.发展核心素是根本目标,但核心素养综合地体现在发现和提出问题、分析与解决问题的过程中.从本课内容中所析取出的三个核心素养,其“主要表现”为:数学建模“在实际情境中从数学的视角提出问题……”;逻辑推理“……发现问题和提出问题”.[3]发现和提出问题,就要基于情境,提出数学问题;分析与解决问题,就是要分析与解决所提出的问题.所以基于这三条主线的教学设计,仍然要以解决问题为导向,以知识发生发展的逻辑过程为基本线索,为学生构建前后一致、逻辑连贯的探究学习过程.[6]在知识的教学中渗透数学思想方法,进而为发展学生的核心素养作出可能的贡献.其中,启发引导学生主动提出问题,可能是本课的重中之重.[7]

这里,就“情境与问题”,[3]具体到本课即创设情境,提出本课题给出如下选择与思考.

(1)从共线向量定理引入

两个向量有何关系？——共线与不共线，共线时有向量共线定理；研究了共线，也就同时研究了不共线.

平面内三个向量有何关系？若其中存在两个向量共线的情形，则问题可转化为两个向量是否共线的问题，这是已经解决了的问题；若不存在任两个向量共线的情形，那么它们将有何关系？——将它们平移到同一个起点，画出图形，结合平行四边形法则……尝试提出问题……

(2)从探求向量代数表示引入

向量兼有数与形的特征，用有向线段表示向量，用平行四边形法则进行向量加法、减法运算，一定意义下属于几何范畴.基于此背景提出问题：

——你能提出什么问题？

——是否可能存在向量的代数形式？进而研究代数形式下向量的运算？

这样就明确了学习的任务，探究的方向.至于怎样研究，就要回到已有的认知基础，即回到几何情境上去.或者说，教师要给出情境，提出具体任务：既然两个向量可以合成一个向量，那么探索一个向量在两个向量方向上的分解可能是有意义的……比如知道两个向量中的一个，以及它们的合向量，可否求作另一个……

另一种思路值得探讨：从平面直角坐标系到有序实数对，这虽与教材安排顺序及坐标的由来相悖，但也许有合理之处：从熟悉到陌生，从特殊到一般，并且重点突出了坐标的本质——有序实数对.设想如下：

——用代数去表示向量，还要兼有几何特征，你觉得在什么情境下探讨较方便？

启发学生萌发到平面直角坐标系中去研究的念头，并基于平面直角坐标系，从探寻特殊的基向量(事实上是标准正交基)出发，通过任一向量都可以用标准正交基线性表示，构建三个向量之间的关系，通过运算推理，得到一个向量用另外两个向量线性表示的结论，此时“离开”平面直角坐标系背景，得到定理.笔者认为，可以视学情允许，尝试这种思路，并进一步与常规思路对比分析.

(3)从物理背景中引入

借助于“力的平衡”情境，观察力的合成与分解，类比向量与力的共同特征，提出类似的问题：向量在两个方向(基底)上的分解.这可能是比较自然合理的，而且是基于“科学情境”提出问题.这对于发展学生核心素养是有益的：引导学生善于观察，在“关联的情境”中提出数学问题，主动发现研究的方法，类比迁移到所研究的新问题上去，并借助已有知识(平行四边形法则)去解决所提出的新问题……

(4)从平行四边形法则引入

在向量加法运算的平行四边形法则中，平行四边形的对角线可以看作是两个向量的和向量.当两个向量确定，和向量(对角线)是确定的；当两个向量改变，比如方向不变，大小改变，对和向量将有怎样的影响呢？若方向再改变呢？让学生充分感受“系数”的存在与意义；反过来，在这一情境中，当和向量确定了，且另外两个向量中的一个确定，另一个是否确定呢？若另外两个向量“部分”地确定，结论将如何呢？比如，如图3，改变向量$\overrightarrow{OA}$的长度，不改变其方向；变向量$\overrightarrow{OA}$为与$\overrightarrow{OA}$方向相反的向量；同时改$\overrightarrow{OA}$为与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为与$\overrightarrow{OB}$方向相反的向量……

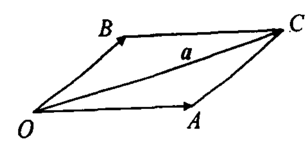

图3 向量的合成与分解

参考文献

[1] 曹泓.数学思想方法在初中概念教学中的渗透[J].数学教学通讯，2010(24)：31－32

[2] 史宁中，王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M].北京：高等教育出版社，2018：5

[3] 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报，2017，26(2)：19－23.

[4] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京：人民教育出版社，2018，1

[5] 李尚志.核心素养怎样考(一)[J].数学通报，2018，57(3)：1－4

[6] 章建跃.构建逻辑连贯的学习过程使学生学会思考[J].数学通报，2013，52(6)：5－8，封底

[7] 綦东剑.素养导向下的学业质量评价探讨[J].数学教育学报，2019，28(5)：59－64