

高二数学中档题小练 (21.4.22)

一. 单项选择题: (本大题共 6 小题)

1. 若在 $(a+2x)(1-\sqrt{x})^6$ 关于 x 的展开式中, 常数项为 2, 则 x^2 的系数是 ()

- A. 60 B. 45 C. 42 D. -42

【答案】A

【分析】

分析二项式 $(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式, 求出 $(a+2x)(1-\sqrt{x})^6$ 的常数项, 进而得到 a 的值, 然后再求出 x^2 项的系数.

【详解】

由题意得 $(1-\sqrt{x})^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_6^r x^{\frac{r}{2}}, r=0,1,2,\dots,6$,

$\therefore (a+2x)(1-\sqrt{x})^6$ 展开式的常数项为 $(-1)^0 C_6^0 \cdot a = a$,

$\therefore a = 2$,

$\therefore (2+2x)(1-\sqrt{x})^6$ 展开式中 x^2 项为 $2 \times (-1)^4 C_6^4 x^2 + 2x \cdot (-1)^2 C_6^2 x = 60x^2$,

$\therefore$ 展开式中 x^2 的系数是 60.

故选 A.

2. 已知 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$, 则 $f(x)$ 在点 $P(-1, 2)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积等于 ()

- A. 4 B. 5 C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{13}{2}$

【答案】C

3. 在新一轮的素质教育要求下, 某校在高一开展了选课走班的活动, 已知该校提供了 3 门选修课供高一学生选择, 现有 5 名同学参加学校选课走班的活动, 要求这 5 名同学每人选修一门课程且每门课程都有人选, 则 5 名同学选课的种数为 ()

- A. 150 B. 180 C. 240 D. 540

【答案】A

【分析】

先把 5 名学生分 3 组, 每组人数分别为 2, 2, 1 或 1, 1, 3, 求得分组数, 再由这 3 组学

生选取3门选修课,得到不同选法,最后利用分步计数原理,即可求解.

【详解】

由题意,先把5名学生分3组,每组人数分别为2, 2, 1或1, 1, 3,

则不同的分组方法有 $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} + \frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} = 25$ 种,

再由这3组学生选取3门选修课,不同的选法有 $A_3^3 = 6$,

由分步计数原理得这5同学选课的种数为 $25 \times 6 = 150$ 种.

故选: A.

【点睛】

4. 若 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$, 则 n 等于 ()

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】C

【解析】由 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$ 和组合数公式得 $\frac{(n+1)!}{7!(n-6)!} - \frac{n!}{7!(n-7)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!}$, 化简得

$$\frac{n+1}{(n-6) \cdot (n-7)} - \frac{1}{n-7} = \frac{1}{8}, \text{ 解之得 } n=14. \text{ 故选: C}$$

【点睛】 本题考查了组合数计算. 属于基础题.

5. 已知圆锥的母线长为3, 则该圆锥体积的最大值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

B. $6\sqrt{3}\pi$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

D. $2\sqrt{3}\pi$

答案 D

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e^3, \\ 6 - \ln x, & x > e^3, \end{cases}$ 若 $f(a) = f(b) = f(c)$ 且 $a < b < c$, 则 $16a + \frac{e^6 b}{c}$ 的取值

范围是 ()

A. $\left(17, \frac{16}{e^3} + e^6\right)$

B. $[12, 17)$

C. $\left[12, \frac{16}{e^3} + e^6\right)$

D. $\left(17, \frac{16}{e^3} + e^3\right)$

答案 C

二. 多项选择题:

7. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则下列说法正确的有 ()

A. 若 $x > 0$, 则 $x^2 f(x) > x + 1$

B. $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值 $\frac{e^2}{4}$

C. $f(x)$ 只有一个零点

D. 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) > k + \frac{1}{x^2}$ 恒成立, 则 $k > e - 1$

答案: AB

8. 已知 $(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})^n (a > 0)$ 的展开式中第 5 项与第 7 项的二项数系数相等, 且展开式的各项系数之和为 1024, 则下列说法正确的是 ()

A. 展开式中第 6 项的系数最大

B. 展开式中奇数项的二项式系数和为 256

C. 展开式中存在常数项

D. 展开式中含 x^{15} 项的系数为 45

答案: ACD

三. 填空题:

9. 已知复数 z 满足 $|z| + z = 3 - 2i$, 则复数 z 的虚部为 _____, $\bar{z} =$ _____.

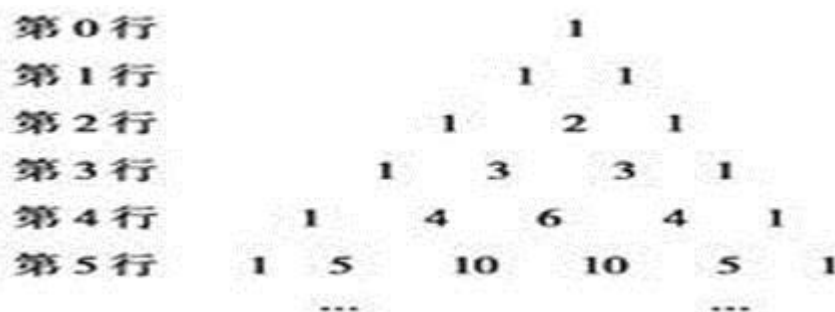
【答案】 -2 $\frac{5}{6} + 2i$

【解析】 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 由题可得 $\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 - 2i$,

$$\text{则 } \begin{cases} b = -2, \\ \sqrt{a^2 + b^2} + a = 3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = -2, \\ a = \frac{5}{6}, \end{cases} \text{ 所以 } z = \frac{5}{6} - 2i,$$

所以复数 z 的虚部为 -2 , $\bar{z} = \frac{5}{6} + 2i$. 故答案为 -2 ; $\bar{z} = \frac{5}{6} + 2i$.

10. 如图, 在由二项式系数所构成的杨辉三角中, 第 _____ 行中从左到右第 14 与第 15 个数的比为 2:3.



答案: 34

11. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, $x \in [1, e]$ 的最小值为 3, 若存在 $x_1, x_2 \cdots x_n \in [1, e]$, 使得

$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) = f(x_n)$, 则正整数 n 可能的最大值为

【解析】 $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$,

①当 $a \leq 0$ 或 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $x \in [1, e]$ 恒成立,

从而 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递减,

所以 $f_{\min}(x) = f(e) = ae - 1 = 3$, 解得 $a = \frac{4}{e} \notin \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$, 不合题意;

②当 $\frac{1}{e} < a < 1$ 时, 易得 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, e\right)$ 单调递增,

所以 $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a} = 3$, 解得 $a = e^2 \notin \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 不合题意;

③当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递增,

所以 $f_{\min}(x) = f(1) = a = 3 > 1$, 满足题意;

综上知 $a = 3$.

所以 $f(x) = 3x - \ln x$, $x \in [1, e]$,

所以 $f_{\min}(x) = f(1) = 3$, $f_{\max}(x) = f(e) = 3e - 1$

依题意有 $(n-1)f_{\min}(x) \leq f_{\max}(x)$, 即 $(n-1)3 \leq 3e - 1$, 得 $n \leq e + \frac{2}{3}$,

又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n \leq 3$. 从而 n 的最大值为 3.

四. 解答题:

12. 六个人按下列要求站成一排, 分别有多少种不同的站法?

(1) 甲不站在两端;

(2) 甲, 乙必须相邻;

(3) 甲, 乙不相邻.

(4) 甲, 乙之间恰有两人

【答案】(1)480.(2)240(3)480(4)144.

【解析】

【分析】

- (1) 现在中间的 4 个位中选一个, 排上甲, 再其余的人任意排, 即可求解;
- (2) 把甲、乙看成一个整体, 进行全排列, 即可求解;
- (3) 先把甲、乙二人单独挑出, 然后再把甲、乙插入其余 4 人形成的 5 个空中, 即可求解;
- (4) 先把甲、乙排好, 再从其余的 4 人中选出 2 人放到甲、乙中间, 最后把排好的这 4 个人看做一个整体进行排列, 即可求解.

【详解】

- (1) 现在中间的 4 个位中选一个, 排上甲, 方法有 4 种, 其余的人任意排, 方法有 $A_4^1 A_5^5 = 480$ (种);
- (2) 把甲、乙看成一个整体, 这样 6 个人变成了 5 个人, 全排列方法共有 $A_2^2 A_5^5 = 240$ (种);
- (3) 先把甲、乙二人单独挑出来, 把其余的 4 个人全排列, 然后再把甲、乙插入其余 4 人形成的 5 个空中, 方法共有 $A_4^4 A_5^2 = 480$ (种);
- (4) 先把甲、乙排好, 有 A_2^2 种方法, 再从其余的 4 人中选出 2 人放到甲、乙中间, 方法有 A_4^2 种.

把排好的这 4 个人看做一个整体, 再与其他的 2 个人进行排列, 方法有 A_3^3 种.

根据分步计数原理, 求得甲、乙之间间隔两人的排法共有 $A_2^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^3 = 144$ (种);

13. 已知 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中, 前三项的系数成等差数列.

- (1) 求 n ;
- (2) 求展开式中的有理项;
- (3) 求展开式中系数最大的项.

解: (1) 由二项展开式知, 前三项的系数分别为 $C_n^0, \frac{1}{2}C_n^1, \frac{1}{4}C_n^2$,

由已知得 $2 \times \frac{1}{2}C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^2$, 解得 $n=8$ ($n=1$ 舍去).

(2) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r = 2^{-r} C_8^r x^4 - \frac{3r}{4} (r=0, 1, \dots, 8)$,

要求有理项, 则 $4 - \frac{3r}{4}$ 必为整数, 即 $r=0, 4, 8$, 共 3 项, 这 3 项分别是 $T_1 = x^4$, $T_5 = \frac{35}{8}x$,

$$T_9 = \frac{1}{256x^2}.$$

(3) 设第 $r+1$ 项的系数 a_{r+1} 最大, 则 $a_{r+1} = 2^{-r} C_8^r$,

$$\text{则 } \frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{2^{-r} C_8^r}{2^{-(r-1)} C_8^{r-1}} = \frac{9-r}{2r} \geq 1,$$

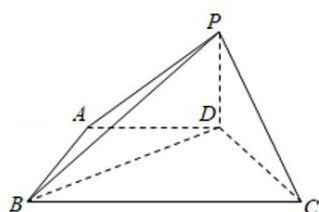
$$\frac{a_{r+1}}{a_{r+2}} = \frac{2^{-r} C_8^r}{2^{-(r+1)} C_8^{r+1}} = \frac{2}{8-r} \geq 1, \text{ 解得 } 2 \leq r \leq 3.$$

当 $r=2$ 时, $a_3 = 2^{-2} C_8^2 = 7$, 当 $r=3$ 时, $a_4 = 2^{-3} C_8^3 = 7$,

因此, 第 3 项和第 4 项的系数最大,

故系数最大的项为 $T_3 = 7x^{\frac{5}{2}}$, $T_4 = 7x^{\frac{7}{4}}$.

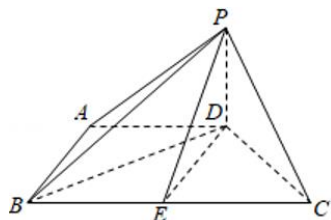
14. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $BC = 2AD$.



(1) 求证: $BD \perp PC$;

(2) 若 $PC = BC$, 求平面 PAD 和平面 PBC 所成的角 (锐角) 的余弦值.

解: (1) 证明: 取 BC 中点 E , 连接 DE .



因为 $BC = 2AD$, 所以 $AD = BE$.

又因为 $AD \parallel BC$, 所以四边形 $ABED$ 是平行四边形.

因为 $\angle ABC = 90^\circ$ 所以四边形 $ABED$ 是矩形. 所以 $DE \perp BC$. 又 $\angle BCD = 45^\circ$ 所以

$$DE = CE = \frac{1}{2} BC.$$

所以 $\triangle BCD$ 是直角三角形, 即 $BD \perp CD$.

又 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $BD \perp PD$.

又 $PD, CD \subset$ 平面 PCD , 且 $PD \cap CD = D$. 所以 $BD \perp$ 平面 PCD . 又 $PC \subset$ 平面 PCD , 所以 $BD \perp PC$.

(2) 解法一：因为 $AD \parallel BC$ ， $AD \subset$ 面 PAD ， $BC \not\subset$ 面 PAD ，

所以 $BC \parallel$ 面 PAD 。设面 PAD 和面 PBC 的交线为 l ，则 $BC \parallel l$ ，连接 PE ，因为 $DE \perp BC$ ，且 $BC \perp PD$

所以 $BC \perp$ 面 PDE ，所以 $l \perp$ 面 PDE 。所以 $l \perp PD$ ， $l \perp PE$

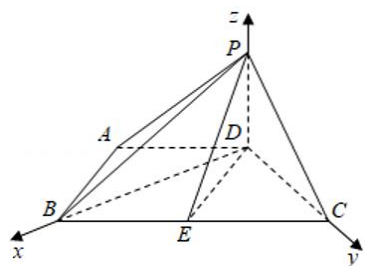
所以 $\angle EPD$ 是面 PAD 和面 PBC 所成二面角的平面角。

设 $AD=1$ ，则 $BC=2$ ，由 (1) 知 $DE=1$ ， $DC=\sqrt{2}$ 。又 $PC=BC$ ，所以 $PD=\sqrt{2}$ 。

在 $\triangle PDE$ 中， $\angle PDE=90^\circ$ ， $PE=\sqrt{3}$ ，所以 $\cos \angle EPD = \frac{PD}{PE} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

所以面 PAD 和面 PBC 所成的角（锐角）的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

解法二：如图，以 D 坐标原点，分别以 DB ， DC ， DP 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，



设 $AD=1$ ，则 $BC=2$ ，由 (1) 知 $DE=1$ ， $DC=\sqrt{2}$ ， $DB=\sqrt{2}$ 。又 $PC=BC$ ，所以 $PD=\sqrt{2}$ 。

所以 $B(\sqrt{2}, 0, 0)$ ， $C(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $P(0, 0, \sqrt{2})$ ， $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ，所以 $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ，

$\overrightarrow{PC} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 。设面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$ ，取 $x=1$ ，则 $y=1$ ， $z=1$ ，

所以面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 。

又面 PAD 的一个法向量为 $\vec{m} = \overrightarrow{DE} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ，

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以平面 PAD 和平面 PBC 所成的角（锐角）的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 - \ln x$, $g(x) = kx$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的切线, 求实数 k 的值;

(3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个不同交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 1$.

【考点】利用导数求函数的最值; 导数的几何意义与函数的切线方程; 利用构造新函数解决极值点偏移问题

【解析】

解: (1) $\because f(x) = x^2 - \ln x$, $\therefore f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} (x > 0)$,

当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减;

当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$3 分

(2) 若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的切线, 设切点为 $(x_0, f(x_0))$,

则过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$,

即 $y = (2x_0 - \frac{1}{x_0})(x - x_0) + x_0^2 - \ln x_0$, 即 $y = (2x_0 - \frac{1}{x_0})x - x_0^2 + 1 - \ln x_0$,

由题意知 $2x_0 - \frac{1}{x_0} = k, -x_0^2 + 1 - \ln x_0 = 0$,5 分

令 $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x (x > 0)$, 则 $x > 0$ 时, $h'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$,

$\therefore h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(1) = 0$,

$\therefore -x_0^2 + 1 - \ln x_0 = 0$ 有唯一的实根 $x_0 = 1$, 则 $k = 2x_0 - \frac{1}{x_0} = 2 - 1 = 1$7 分

分

(3) 由题意知 $x_1^2 - \ln x_1 = kx_1, x_2^2 - \ln x_2 = kx_2$,

两式相加得 $x_1^2 + x_2^2 - \ln x_1 x_2 = k(x_1 + x_2)$,

两式相减得 $x_2^2 - x_1^2 - \ln \frac{x_2}{x_1} = k(x_2 - x_1)$, 即 $x_2 + x_1 - \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} = k$,

$\therefore x_1^2 + x_2^2 - \ln x_1 x_2 = (x_2 + x_1 - \frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1})(x_1 + x_2)$, 即 $\ln x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1}$,

不妨令 $0 < x_1 < x_2$, 记 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $\ln x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{t+1}{t-1} \ln t$,

令 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$, 则 $F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)} > 0$,

$\therefore F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > F(1) = 0$,

$\therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, 因而 $\ln x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = \frac{t+1}{t-1} \ln t > \frac{t+1}{t-1} \cdot \frac{2(t-1)}{t+1} = 2$,

令 $G(x) = \ln x + 2x$, 则 $x > 0$ 时, $G'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$, $\therefore G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore G(x_1 x_2) = \ln x_1 x_2 + 2x_1 x_2 > 2 = G(1)$, $\therefore x_1 x_2 > 1$12 分