

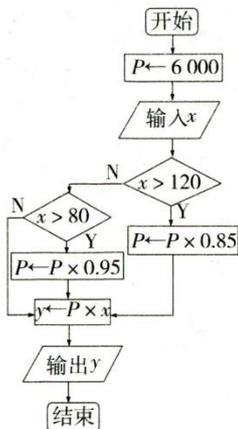
仪征中学 2019 年高考数学全真模拟试卷 五

数学 I

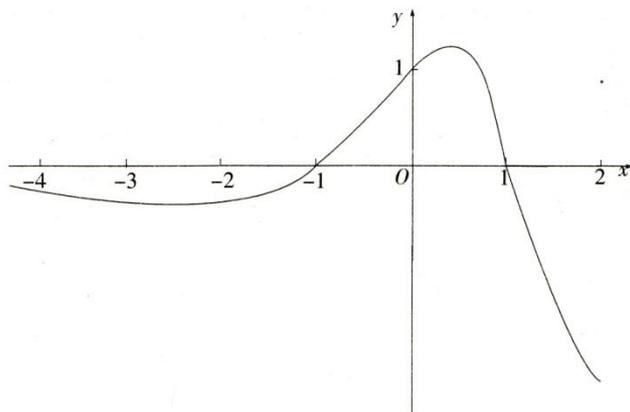
本试卷均为非选择题(第 1 题 ~ 第 20 题,共 20 题). 本卷满分为 160 分,考试时间为 120 分钟.

一、填空题:本大题共 14 小题,每小题 5 分,共计 70 分.

1. 已知复数 $z = (1 + i)i$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的模为 _____.
2. 已知集合 $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 12\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x - 5}\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 _____.
3. 某大学数学系、外语系、计算机系的人数之比为 3:4:3, 现用分层抽样的方法从该大学这三个系中抽取一个容量为 n 的样本, 若从计算机系中抽取 15 人, 则 n 的值为 _____.
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (m, 4)$, 且 $\mathbf{a} \perp (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则实数 m 的值为 _____.
5. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 $f(\frac{\pi}{8})$ 的值是 _____.
6. 将一个棱长为 4 的正四面体表面涂上红色, 然后锯成棱长为 2 的小正四面体, 从中任取一个小正四面体, 则这个小正四面体三面涂有红色的概率是 _____.
7. 已知某圆锥的侧面展开图的面积是底面面积的 2 倍, 则这个圆锥的高 h 与底面半径 r 的比值为 _____.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 满足 $a_6 = a_2 \cdot a_{10}$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $b_9 = 2a_7$, 则 $S_{17} =$ _____.
9. 已知 M, N 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 上关于坐标原点 O 对称的点, P 为双曲线上异于 M, N 的点, 若直线 PM 的斜率的取值范围是 $[\frac{1}{2}, 2]$, 则直线 PN 的斜率的取值范围是 _____.
10. 某种最新智能手机市场价为每部 6 000 元, 若一次采购数量达到一定量, 还可享受折扣. 如图为某位采购商根据折扣情况设计的算法流程图, 其中 P 表示购买一部手机的价格, x 表示一次采购该智能手机的部数, y 表示购买 x 部该手机的总价钱. 若输出的 $y = 513\ 000$ 元, 则一次采购该智能手机的部数为 _____.



(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y = (1 - x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 在 $(-4, 2)$ 上的所有极值点之和为 _____.

12. 设直线 $l_1: x - 2y + 1 = 0$ 的倾斜角为 α , 直线 $l_2: x - my + 1 = 0$ 的倾斜角为 β , 且满足 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 若 l_2 截圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - p = 0$ 所得的弦长为 6, 则 $m + p =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $B = \frac{\pi}{6}, c = 2\sqrt{3}$, 则 $a + 2b$ 的最小值是 _____.

14. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的函数, 其图象关于 y 轴对称, 当 $x \geq 0$ 时, 有 $f(x+1) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 若方程 $f(x) - kx = 0$ 恰有 5 个不同的实数解, 则 k 的取值范围是 _____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

已知 α, β 为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}, \sin \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

(1) 求 $\alpha + \beta$ 的值;

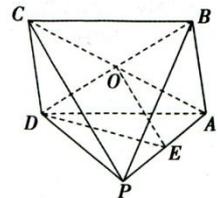
(2) 若 $\tan(\alpha + \theta) = \tan \beta$, 求 $\tan \theta$.

16. (本小题满分 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, E 为侧棱 PA 的中点, O 为 AC 与 BD 的交点.

(1) 求证: $OE \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若 $DE \perp CD, PD = AD$, 求证: 平面 $APD \perp$ 平面 PAB .



17. (本小题满分 14 分)

为改善辖区内贫困地区的交通条件,某地计划修建一座大桥,如图 1 所示,该桥的主桥剖面图如图 2 所示,其中 O_1 为桥的最高点,桥顶部 $B_1 - O_1 - B$ 为抛物线的一部分,桥两侧连接线 BP 和 B_1P_1 所在的直线分别与抛物线在连接点 B 和 B_1 处相切,连接点 B 和 B_1 在水面的投影分别为 A 和 A_1 ,若建立如图 2 所示的平面直角坐标系,则抛物线的方程为 $y = -ax^2 + k (a > 0)$. 为满足工程和通行需求,对部分数据有以下要求: $OA = 50$ m, $AB = (10 + \frac{1}{2500a})$ m.

(1) 求 k 关于 a 的函数表达式 $k(a)$;

(2) 若桥的最高点 O_1 距水面的距离 $k(a)$ 不大于 $\frac{201}{10}$ m, 道路 B_1P_1 的坡度不大于 $\frac{1}{200}$, 求实数 a 的取值范围.



图 1

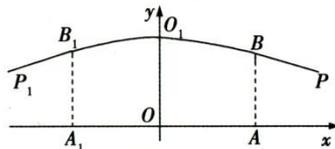


图 2

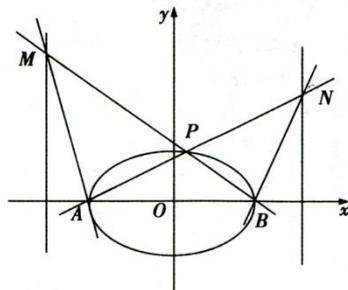
18. (本小题满分 16 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $(-2, 0)$, 且焦点到相应准线的距离为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图所示, 椭圆 C 的左、右顶点分别为 A, B, P 为椭圆 C 上(在 x 轴上方)的一点, 直线 AP 交直线 $x = \frac{b^2}{c}$ 于点 N , 直线 BP 交直线 $x = -\frac{b^2}{c}$ 于点 M . 若直线 BN, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 - k_2$ 的最小值.

N , 直线 BP 交直线 $x = -\frac{b^2}{c}$ 于点 M . 若直线 BN, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 - k_2$ 的最小值.



19. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = Aa_n^2 + Ba_n + C$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_2 = 3, S_5 = 25$, 求实数 A, B, C 的值;

(2) 若 $A = 0, B = 2, C = -2$,

① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

② 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n + \frac{1}{a_n}$, 问: 数列 $\{c_n\}$ 中是否存在三项成等差数列? 若存在, 求出所有满足条件的项; 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f_k(x) = e^x - ax^k (a, k \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = 1$,

① 求函数 $f_2(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最小值;

② 若函数 $F(x) = f_1(x) + b$ 有两个不同的零点, 求实数 b 的取值范围;

(2) 若 $a = -1$, $f_1(x)$ 的图象在 $x = t (t > 0)$ 处的切线与 $f_1(x)$ 的图象在 $x = -t$ 处的切线交于点 (x_0, y_0) , 证明: $y_0 > 1$.

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 得分_____

仪征中学 2019 年高考数学全真模拟试卷 五

附加题

B. [选修 4-2:矩阵与变换] (本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 求 A^2 .

C. [选修 4-4:坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = a \cos \theta (a > 0)$. 若直线 l 与圆 C 有交点, 求实数 a 的取值范围.

22. (本小题满分10分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 与直线 $l: y = x + b (b \in \mathbf{Z})$ 相交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点的横坐标为 5, 且抛物线 C 的焦点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.

(1) 求 p, b 的值;

(2) 设 P 为抛物线 C 上一点, 若 $\angle APB$ 为钝角, 求点 P 的纵坐标的取值范围.

23. (本小题满分10分)

已知各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n^3\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且满足 $T_n = S_n^2$.

(1) 求所有满足条件的 a_1, a_2, a_3 ;

(2) 若 $a_n > 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.