运用函数与方程的思想方法解题

【真题感悟】

1. (2014·福建)要制作一个容积为4 m^3、高为1 m的无盖长方体容器.已知该容器的底面造价是每平方米20元,侧面造价是每平方米10元,则该容器的最低总造价是________.(单位:元)

2. (2015·浙江改编)设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量,非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,$x,y\in\mathbf{R}$.若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$,则 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值等于__________.

3. (2014·福建改编)设 P,Q 分别为圆 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点,则 P,Q 两点间的最大距离是________.

4. (2013·安徽)已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点.若该抛物线上存在点 C,使得 $\angle ACB$ 为直角,则 a 的取值范围为________.

【考点展示】

1. (2015·山东改编)设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-b, x<1,\\ 2^x, x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f\left[f\left(\frac{5}{6}\right)\right]=4$,则 $b=$________.

2. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$,$g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M,N,则当 MN 达到最小时 t 的值为________.

3. 若 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,则 $\tan\alpha\tan\beta=$________.

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-1)=2$,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f'(x)>2$,则不等式 $f(x)>2x+4$ 的解集为________.

5. 设 $a>1$,若仅有一个常数 c,使得对于任意的 $x\in[a,2a]$,都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$,这时 a 的取值的集合为________.

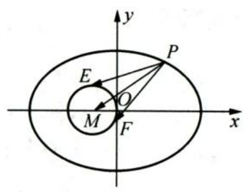
6. 已知函数 $f(x)=e^x+a$,$x\in[m,n]$ 的值域为 $[2m,2n]$,则 a 的取值范围是________.

【典题导引】

例1 如图,已知椭圆 G:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$,$\odot M$:$(x+1)^2+y^2=1$,$P$ 为椭圆 G 上一点,过 P 作 $\odot M$ 的两条切线 PE,PF,E,F 分别为切点.

(1) 求 $t=|\overrightarrow{PM}|$ 的取值范围;

(2) 把 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 表示成 t 的函数 $f(t)$,并求出 $f(t)$ 的最大值、最小值.



(例1图)

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{x}-\ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值;

(2) 求证:$\ln\frac{e^2}{x}\leqslant\frac{1+x}{x}$.(参考数据:$0.69<\ln 2<0.70$)

例 3 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,$a_2a_5=32$,$a_3+a_4=12$,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$,且 $b_{n+1}=2b_n+2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明:数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 是等差数列;

(2) 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,不等式 $(n+2)b_{n+1}\geqslant\lambda b_n$ 总成立,求实数 λ 的最大值.

例 4 已知函数 $f(x)=(ax^2+x)e^x$,其中 e 是自然对数的底数,$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调增函数,求 a 的取值范围;

(2) 当 $a=0$ 时,求整数 k 的所有值的集合,使方程 $f(x)=x+2$ 在 $[k,k+1]$ 上有解.