直线与圆锥曲线综合应用

教学重点：

1、会利用方程（组）研究直线与圆锥曲线的位置关系，解决有关交点、弦、弦长、中点及直线与圆锥曲线的有关问题.

2、会利用方程（组）研究直线与圆锥曲线的位置关系，解决有关弦长及直线与圆锥曲线的有关问题.

3、会求定点、定值、最值等问题；掌握函数与方程等价转换、分类讨论等思想方法.

一、弦长、弦中点问题

例 1：已知中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆过点 P（2，$\sqrt{3}$），且它的离心率 $e=\frac{1}{2}$.

（1） 求椭圆的标准方程；

（2） 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切的直线 l：$y=kx+t$ 交椭圆于 M，N 两点，若椭圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OC}$，求实数 λ 的取值范围.

反馈练习：

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 O：$x^2+y^2=b^2$ 经过椭圆 E：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$0<b<2$）的焦点.

（1） 求椭圆 E 的标准方程；

（2） 设直线 l: $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 P，Q 两点，点 T 为弦 PQ 的中点，M（－1，0），N（1，0），记直线 TM，TN 的斜率分别为 k_1，k_2，当 $2m^2-2k^2=1$ 时，求 $k_1\cdot k_2$ 的值.

解:（1） ∵ $0<b<2$，∴ 椭圆 E 的焦点在 x 轴上.又圆 O: $x^2+y^2=b^2$ 经过椭圆 E 的焦点，∴椭圆的半焦距 $c=b$，

∴ $2b^2=4$，即 $b^2=2$，∴ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2） （解法 1） 设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），T（x_0，y_0），联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，∴ $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$.又 $2m^2-2k^2=1$，∴ $x_1+x_2=-\frac{2k}{m}$，

∴ $x_0=-\frac{k}{m}$，$y_0=m-k\cdot\frac{k}{m}=\frac{1}{2m}$，则 $k_1\cdot k_2=\frac{\frac{1}{2m}}{-\frac{k}{m}+1}\cdot\frac{\frac{1}{2m}}{-\frac{k}{m}-1}=\frac{1}{4k^2-4m^2}=\frac{1}{-2(2m^2-2k^2)}=-\frac{1}{2}$.

（解法 2）设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），T（x_0，y_0），则$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$

两式作差，得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$.又 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，

∴ $\dfrac{x_0(x_1-x_2)}{2}+y_0(y_1-y_2)=0$，

∴ $\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0(y_1-y_2)}{x_1-x_2}=0$.

又 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）在直线 $y=kx+m$ 上，

∴ $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$，∴ $x_0+2ky_0=0$ ①.

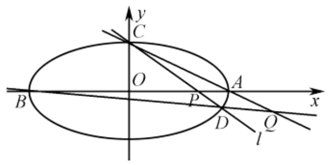
又 T（x_0，y_0）在直线 $y=kx+m$ 上，∴ $y_0=kx_0+m$ ②，

由①②可得 $x_0=-\dfrac{2km}{1+2k^2}$，$y_0=\dfrac{m}{1+2k^2}$.

以下同解法 1.

二、定点、定值问题

例 2：如图，过点 C（0，1）的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为



$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆与 x 轴交于两点 A（a，0），B（$-a$，0）.过点 C 的直线 l 与椭圆交于另一点 D，并与 x 轴交于点 P.直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

（1） 当直线 l 过椭圆右焦点时，求线段 CD 的长；

（2） 当点 P 异于点 B 时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

（1） **解**：由已知得 $b=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

椭圆的右焦点为（$\sqrt{3}$，0），此时直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$，

代入椭圆方程化简得 $7x^2-8\sqrt{3}x=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$，

代入直线 l 的方程得 $y_1=1$，$y_2=-\dfrac{1}{7}$，

所以 D 点坐标为（$\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$，$-\dfrac{1}{7}$）.

故 $CD=\sqrt{\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{7}-0\right)^2+\left(-\dfrac{1}{7}-1\right)^2}=\dfrac{16}{7}$.

（2） **证明**：当直线 l 与 x 轴垂直时与题意不符.

设直线 l 的方程为 $y=kx+1\left(k\neq0且k\neq\dfrac{1}{2}\right)$.

代入椭圆方程化简得 $(4k^2+1)x^2+8kx=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}$，

代入直线 l 的方程得 $y_1=1$，$y_2=\frac{1-4k^2}{4k^2+1}$，

所以 D 点坐标为$\left(\frac{-8k}{4k^2+1},\ \frac{1-4k^2}{4k^2+1}\right)$.

又直线 AC 的方程为$\frac{x}{2}+y=1$，

直线 BD 的方程为 $y=\frac{1+2k}{2-4k}(x+2)$，

与直线 AC 的方程联立解得$\begin{cases}x=-4k,\\ y=2k+1.\end{cases}$

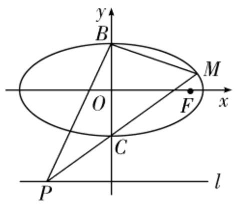
因此 Q 点坐标为（$-4k$，$2k+1$）.

又 P 点坐标为$\left(-\frac{1}{k},\ 0\right)$，

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{k},\ 0\right)\cdot(-4k,\ 2k+1)=4$.

故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

反馈练习：



如图，已知椭圆 O：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F，点 B，C 分别是椭圆 O 的上、下顶点，点 P 是直线 l：$y=-2$ 上的一个动点（与 y 轴的交点除外），直线 PC 交椭圆于另一个点 M.

（1） 当直线 PM 经过椭圆的右焦点 F 时，求△FBM 的面积；

（2） 记直线 BM，BP 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值.

（1） **解**：由题意 B（0，1），C（0，-1），焦点 F（$\sqrt{3}$，0），

当直线 PM 过椭圆的右焦点 F 时，则直线 PM 的方程为$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{-1}=1$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{8\sqrt{3}}{7},\\ y=\frac{1}{7}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=0,\\ y=-1\end{cases}$（舍去），即 M（$\frac{8\sqrt{3}}{7}$，$\frac{1}{7}$）.

连结 BF，则直线 BF：$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{1}=1$，即 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$，

而 $BF=a=2$，点 M 到直线 BF 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{8\sqrt{3}}{7}+\sqrt{3}\times\frac{1}{7}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{7}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{7}$.

故 $S_{\triangle MBF}=\frac{1}{2}\cdot BF\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}$.

（2） **证明**：（证法 1：点 P 为主动点）设 P（m，-2），且 $m\neq0$，

则直线 PM 的斜率为 $k=\frac{-1-(-2)}{0-m}=-\frac{1}{m}$，

则直线 PM 的方程为 $y=-\frac{1}{m}x-1$，

联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{m}x-1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 化简得$\left(1+\frac{4}{m^2}\right)x^2+\frac{8}{m}x=0$，

解得$M\left(-\frac{8m}{m^2+4}，\frac{4-m^2}{m^2+4}\right)$，

所以$k_1=\frac{\frac{4-m^2}{m^2+4}-1}{-\frac{8m}{m^2+4}}=\frac{-2m^2}{-8m}=\frac{1}{4}m$，$k_2=\frac{1-(-2)}{0-m}=-\frac{3}{m}$，

所以$k_1\cdot k_2=-\frac{3}{m}\cdot\frac{1}{4}m=-\frac{3}{4}$为定值.

（证法2：点M为主动点）设点M（x_0，y_0）（$x_0\neq0$），则直线PM的方程为$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，

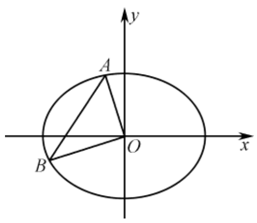
令$y=-2$，得$P\left(-\frac{x_0}{y_0+1}，-2\right)$.

所以$k_1=\frac{y_0-1}{x_0}$，$k_2=\frac{-2-1}{-\frac{x_0}{y_0+1}}=\frac{3(y_0+1)}{x_0}$，

所以$k_1\cdot k_2=\frac{y_0-1}{x_0}\cdot\frac{3(y_0+1)}{x_0}=\frac{3(y_0^2-1)}{x_0^2}=\frac{3(y_0^2-1)}{4(1-y_0^2)}=-\frac{3}{4}$（定值）.

三、最值与取值范围问题

例3：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的左焦点为F（−1，0），



左准线方程为$x=-2$.

（1） 求椭圆C的标准方程；

（2） 如图，若椭圆C上有A，B两点，满足OA⊥OB（O为坐标原点），求△AOB面积的取值范围.

解：（1） 由题设知$c=1$，$-\frac{a^2}{c}=-2$，

所以$a^2=2$，$b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2） 当直线OA，OB分别与坐标轴重合时，易知△AOB的面积$S=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当直线OA，OB的斜率均存在且不为零时，设OA：$y=kx$，OB：$y=-\frac{1}{k}x$，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），将$y=kx$代入椭圆C的方程得到$x^2+2k^2x^2=2$，

所以$x_1^2=\frac{2}{2k^2+1}$，$y_1^2=\frac{2k^2}{2k^2+1}$，同理$x_2^2=\frac{2k^2}{2+k^2}$，$y_2^2=\frac{2}{2+k^2}$，

△AOB的面积$S=\frac{OA\ OB}{2}=\sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+1)(k^2+2)}}$.

令$t=k^2+1\in(1，+\infty)$，

则 $S=\sqrt{\frac{t^2}{(2t-1)(t+1)}}=\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}$.

令 $u=\frac{1}{t}\in(0,1)$，

则 $S=\sqrt{\frac{1}{-u^2+u+2}}=\sqrt{\frac{1}{-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}\in[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$．

综上所述，$S\in[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$．

反馈练习：

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点（0，1），且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，若 F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上.

（1） 求证：$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\geqslant 0$；

（2） 过原点 O 且垂直于 PF 的直线与直线 $y=2$ 交于点 Q，求△OPQ 面积的最小值.

（1） **证明**：因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点（0，1），所以 $b=1$.

因为离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

由题意可知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，设点 $P(x_0,y_0)$，

则$\overrightarrow{PF_1}=(-1-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{PF_2}=(1-x_0,-y_0)$，

所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2+y_0^2-1$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，

所以$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即 $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{2}$，

所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2+1-\frac{x_0^2}{2}-1=\frac{1}{2}x_0^2$（$-\sqrt{2}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2}$），

所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\geqslant 0$.

（2） 设点 $Q(m,2)$，

当 $m=0$ 时，点 $Q(0,2)$，P 点坐标为$(-\sqrt{2},0)$或$(\sqrt{2},0)$，

此时 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$.

当 $m\neq 0$ 时，直线 OQ 的方程为 $y=\frac{2}{m}x$，即 $2x-my=0$，

所以直线 PF 的方程为 $y=-\frac{m}{2}(x-1)$．

所以点 P 到直线 OQ 的距离 $d=\frac{|2x_0-my_0|}{\sqrt{2^2+(-m)^2}}$，

OQ 的长度 $OQ=\sqrt{2^2+(-m)^2}$，

所以 $S=\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot d=\frac{1}{2}\times|2x_0-my_0|=\left|x_0-\frac{m}{2}y_0\right|$.

又 $y_0=-\frac{m}{2}(x_0-1)$，

所以 $S=\left|x_0+\frac{y_0^2}{x_0-1}\right|=\left|x_0+\frac{1-\frac{x_0^2}{2}}{x_0-1}\right|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{x_0^2-2x_0+2}{x_0-1}\right|=\frac{1}{2}\times\left|x_0-1+\frac{1}{x_0-1}\right|=\frac{1}{2}$（$|x_0-$

$1|+\frac{1}{|x_0-1|}$）$\geqslant 1$.

当且仅当$|x_0-1|=\frac{1}{|x_0-1|}$，即 $x_0=0$ 时等号成立.

综上，当 $x_0=0$ 时，△OPQ 面积有最小值 1.

四、圆锥曲线中的探索性问题

例 4：在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆上动点 P 到一个焦点的距离的最小值为 3（$\sqrt{2}-1$）.

（1） 求椭圆 C 的标准方程；

（2） 已知过点 M（0，－1）的动直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，试判断以线段 AB 为直径的圆是否恒过定点，并说明理由.

思路分析：(1） 椭圆上动点 P（x_0，y_0）到左、右焦点的距离的最小值为 a－c.

（2） 先根据直径 AB 竖直和水平两种情况，猜出定点可能为 D（0, 3），再考虑$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$是否为零.

解：(1） 由题意，得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a-c=3(\sqrt{2}-1),\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3\sqrt{2},\\ c=3.\end{cases}$ 所以 $b^2=a^2-c^2=9$.

椭圆 C 的标准方程是$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

（2） 当直线 l 的斜率不存在时，以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=9$；

当直线 l 的斜率为零时，以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+(y+1)^2=16$.

这两圆仅有唯一公共点，也是椭圆的上顶点 D（0，3）.猜想以 AB 为直径的圆恒过定点 D（0，3）.

证明如下：

（证法 1：向量法）设直线 l 的方程为 $y=kx-1$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.只要证$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1x_2+(y_1-3)(y_2-3)=x_1x_2+(kx_1-4)(kx_2-4)=0$ 即可.

即要证$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(1+k^2)x_1x_2-4k(x_1+x_2)+16=0$.

由$\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2+2y^2=18,\end{cases}$ 消去 y，得$(1+2k^2)x^2-4kx-16=0$，$\Delta=16k^2+64(1+2k^2)>0$，此方程总有两个不等实根 x_1，x_2.

$x_{1,2}=\frac{2k\pm2\sqrt{9k^2+4}}{1+2k^2}$，所以 $x_1+x_2=\frac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-16}{1+2k^2}$.

所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(1+k^2)x_1x_2-4k(x_1+x_2)+16=\frac{-16(1+k^2)}{1+2k^2}-\frac{16k^2}{1+2k^2}+16=0$.

所以 DA⊥DB，所以以 AB 为直径的圆恒过定点 D（0，3）.

（证法 2：斜率法）若设 DA，DB 的斜率分别为 k_1，k_2，只要证 $k_1k_2=-1$ 即可.

设直线 l 的斜率为 λ，则$\frac{y_A+1}{x_A}=\lambda$.

由点 A 在椭圆 $x^2+2y^2=18$ 上，得 $x_A^2+2y_A^2=18$，变形得$\frac{y_A-3}{x_A}\cdot\frac{y_A+3}{x_A}=-\frac{1}{2}$，

即 $k_1\cdot\frac{y_A+3}{x_A}=-\frac{1}{2}$.

设 $y_A+3=m(y_A-3)+n(y_A+1)$，可得 $m=-\frac{1}{2}$，$n=\frac{3}{2}$，得$\frac{y_A+3}{x_A}=\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}k_1$.

从而 $k_1(3\lambda-k_1)=-1$，即 $k_1^2-3\lambda k_1-1=0$.

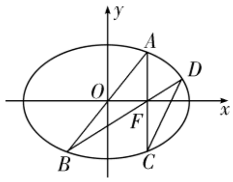
同理 $k_2^2-3\lambda k_2-1=0$，所以 k_1，k_2 是关于 k 的方程 $k^2-3\lambda k-1=0$ 的两实根.

由根与系数的关系，得 $k_1k_2=-1$.所以 $DA\perp DB$，

所以以 AB 为直径的圆恒过定点 D（0，3）.

反馈练习：

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$.F 为椭圆的右焦点，A，B 为椭圆上关于原点对称的两点，连结 AF，BF 并延长分别交椭圆于点 C，D.



（1） 求椭圆的标准方程；

（2） 若 AF＝FC，求$\frac{BF}{FD}$的值；

（3）设直线 AB，CD 的斜率分别为 k_1，k_2，是否存在实数 m，使得 $k_2=mk_1$？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

解： （1） 由题意知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2） 若 AF＝FC，由椭圆对称性，知 AC 垂直于 x 轴，

$A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以 $B\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，

此时直线 BF 方程为 $3x-4y-3=0$，

由$\begin{cases}3x-4y-3=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x=\frac{13}{7}$（$x=-1$ 舍去），故$\frac{BF}{FD}=\frac{1-(-1)}{\frac{13}{7}-1}=\frac{7}{3}$.

（3） 设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$.

直线 AF 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，

代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $(15-6x_0)x^2+(6x_0^2-24)x-15x_0^2+24x_0=0$.

因为 $x=x_0$ 是该方程的一个解，

所以点 C 的横坐标 $x_C=\frac{8-5x_0}{5-2x_0}$.

又 $C(x_C,y_C)$ 在直线 $y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$ 上，

所以 $y_C=\frac{y_0}{x_0-1}(x_C-1)=\frac{-3y_0}{5-2x_0}$.

同理，点 D 坐标为$\left(\frac{8+5x_0}{5+2x_0}, \frac{3y_0}{5+2x_0}\right)$.

所以 $k_2=\frac{\frac{3y_0}{5+2x_0}-\frac{-3y_0}{5-2x_0}}{\frac{8+5x_0}{5+2x_0}-\frac{8-5x_0}{5-2x_0}}=\frac{5y_0}{3x_0}=\frac{5}{3}k_1$,

即存在 $m=\frac{5}{3}$，使得 $k_2=\frac{5}{3}k_1$.