大学视角下的中学数学(导数)

李尚志

(北京航空航天大学 100083)

例 1 (2017 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题)函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值;

(2) m 为整数,且对于任意正整数 n, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$. 求 m 的最小值.

解 (1) $f(1)=0$. 要使 $f(x)\geqslant 0$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内成立,

需要 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内递减, $f'(x)=1-\frac{a}{x}\leqslant 0$, $a\geqslant 1$;

且 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 内递增, $f'(x)=1-\frac{a}{x}\geqslant 0$, $a\leqslant 1$. 只能 $a=1$.

(2)由(1)知道 $\ln x\leqslant x-1$ 对 $x>0$ 成立.

记 $t=x-1$,则 $x=1+t$. $\ln(1+t)\leqslant t$ 对 $t>-1$成立. 因此

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}<3,$$
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{9}{8}$$
$$>\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{16}{15}=2.$$

因此 $m>2$. 只能 $m=3$.

大学视角 第(1)小题的做法是很常规的基本方法,得出的不等式

$f(x)=x-1-\ln x\geqslant 0$,即 $\ln x\leqslant x-1(\forall x>0)$

却是攻克第(2)小题的关键. 本题的第(1)小题不是为了为难学生,反而为了提示他们利用以上不等式得到

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$

帮助做第(2)题.

不过,我一看到第(2)题首先想到的不是对数不等式 $\ln x\leqslant x-1$,而是指数不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$. 直接得到

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2^2}}\cdots\mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<\mathrm{e}<3,$$

不需要借助对数绕圈子.

借题发挥 自然对数为什么最自然

我第一次见到 e,是中学课本上讲对数的最后一句话:"科学上通常用一个无理数 e=2.71828…作为对数的底,叫做自然对数."为什么不用最自然的 10 为底,偏要用一个无理数? 当时觉得一点都不自然.

1. 幸运斜率为何幸运

中学数学现在学了幂函数、指数函数、对数函数的导数公式,并且成为高考中必考内容. 导数用来干什么? 一个重要用途是判定函数的递增、递减、极值. 还有一个简单而重要的用途是求切线方程.

函数 $y=f(x)$ 在 $x=c$ 的导数 $f'(c)$ 的几何意义是图象曲线在点 $(c,f(c))$ 的切线斜率. 有了切线斜率,用点斜式就可写出过这一点的切线方程 $y=f(c)+f'(c)(x-c)$,其实就是函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 作泰勒展开到一次项. 例如,对数函数 $y=\ln x$ 的导数 $y'=\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 取值为 1,过这一点 $(1,0)$ 的切线方程为 $y=x-1$. 如图 1.

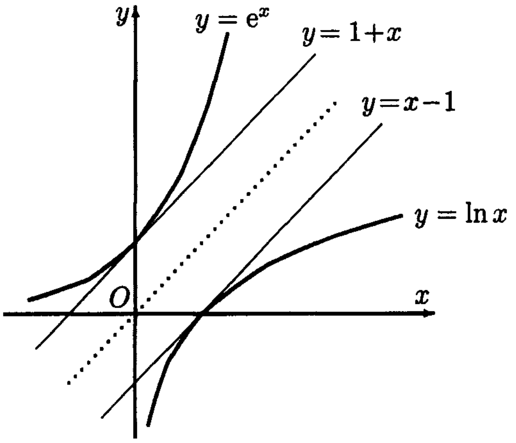


图1

由图看出:曲线 $y=\ln x$ 始终在切线 $y=x-1$ 下方.始终有 $x-1\geqslant\ln x, x-1-\ln x\geqslant 0$.这正是例1第(1)小题的答案.如果 $y=a\ln x$ 在点(1,0)的切线斜率 $a\neq 1$,曲线 $y=a\ln x$ 与直线 $y=x-1$ 在点(1,0)相交而不相切,曲线在这点穿越直线 $y=x-1$,不可能始终在直线 $y=x-1$ 下方,不能保持 $x-1-a\ln x\geqslant 0$.

将平面上所有的图形关于直线 $y=x$ 作轴对称变换,则右下方的对数曲线 $y=\ln x$ 及其切线 $y=x-1$ 翻转到左上方的 $x=\ln y$ 及其切线 $x=y-1$,也就是变成指数曲线 $y=e^x$ 及其切线 $y=1+x$,指数曲线始终在切线的上方,不等式 $e^x\geqslant 1+x$ 对所有实数 x 成立.

指数曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)的切线斜率也可用指数函数 $f(x)=e^x$ 求导公式 $(e^x)'=e^x$ 得到:$f'(0)=e^0=1$,切线方程为 $y=1+x$.

为什么对数曲线 $y=\ln x$ 在点(1,0)的切线斜率正好是1,指数曲线 $y=e^x$ 在(0,1)的切线斜率也正好是1? 为什么如此幸运?

不是天上掉下来的幸运.是我们选择了对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 的底 $a=e$,才赢得了如此幸运.

我们来计算对数函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $x=1$ 的导数 $f'(1)$.

$$f'(1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)-\log_a 1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\log_a e,$$

其中 $e=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=2.71828\cdots$,与 a 无关.

要使 $f'(1)=\log_a e=1$,只能选 $a=e$,得到的对数记为 $\ln x$,称为自然对数,它在(1,0)的切线方程为 $y=x-1$.

如果换成常用对数 $f(x)=\lg x=\log_{10}x$,则使 $f'(1)=\lg e\approx 0.43429$,切线方程为 $y=0.43429x-1$.你认为比 $y=x-1$ 更自然吗?

再来计算对数函数 $f(x)=\log_a x$ 在任意 $x>0$ 的导数

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(x+t)-\log_a x}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log_a\frac{x+t}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{t}\log_a\left(1+\frac{t}{x}\right),$$

由于 $x>0$ 固定不变,当 $t\to 0$ 时有 $\theta=\frac{t}{x}\to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{x}{t}\log_a\left(1+\frac{t}{x}\right)=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\log_a(1+\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\log_a(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}=\log_a e,$$

因此 $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$.

如果取 $a=e$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 最简单.其余情形下 $f'(x)=\frac{\log_a e}{x}$.

再来计算指数函数 $y=f(x)=a^x$ 在 x 的导数

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{x+t}-a^x}{t}$$

$$=a^x\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t},$$

令 $u=a^t-1$,则 $t=\log_a(1+u)$.当 $t\to 0$ 时 $u\to 0$,因此

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e},$$

$$f'(x)=(a^x)'=\frac{a^x}{\log_a e}.$$

取 $a=e$,则 $(e^x)'=e^x$,$f'(0)=e^0=1$,曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)的切线方程为 $y=1+x$.如图1.

2.对数表怎样编出来的

为什么要发明对数?最初的目的就是要简化运算.比如要算除法 $7640\div 2784$ 很困难,要开方

$\sqrt[7]{7640}$根本没法算. 将 7640,2784 写成同底数的幂 $7640=10^b$,$2784=10^c$,则

$$7640\div 2784=10^b\div 10^c=10^{b-c},$$

$$\sqrt[7]{7640}=(10^b)^{\frac{1}{7}}=10^{\frac{b}{7}},$$

除法变成了减法运算 $b-c$,开 7 次方变成了除法运算$\frac{b}{7}$,运算都变容易了. 剩下的困难是:由幂 $x=10^y$算指数 y,由指数 y 算幂 $x=10^y$.

由 $x=10^y$ 算指数 y 就是求对数 $y=\log_{10}x$,x 叫做真数. 以 10 为底的对数 $\log_{10}x$ 简记为 $\lg x$,称为常用对数,需要编出对数表,由真数 x 查对数 $y=\lg x$. 还需要反对数表由对数 $y=\lg x$ 查真数 $x=10^y$.

怎样编对数表? 算出 10 的正整数次幂 $10^y=x$. 则 $y=\lg x$. 例如

x	1	10	100
$y=\lg x$	0	1	2

这个对数表基本上没什么用:x 值从 1 跳到 10 间隔太大,2,3,…,9 全都没有,更别说 2.784,7.640 了. 怎么改进? 假如能够算出 10 的 1 万次方根 $q=10^{0.0001}$,将 q 的 9999 个正整数次幂 λ^m($1\leqslant m\leqslant 9999$)插入 1 与 10 之间的大间隔,分割成 10000 个微小间隔. 则 $\lg q=0.0001$,$\lg(q^m)=0.0001m$. 这个对数表的精确度就很高了:

x	1	q	q^2	…	q^m	…	q^{9999}	10
$y=\lg x$	0	0.0001	0.0002	…	$0.0001m$	…	0.9999	1

不过,开 1 万次方计算 $10^{0.0001}$很难. 可以反过来,取一个比 1 稍微大一点的数 $q=1.0001$,计算它的正整数次幂 $q,q^2,\cdots.q^m,\cdots,q^n\approx 10$ 直到 q^n 非常接近 10. 将它们插入 1 与 10 的大间隔,分割成 n 个微小间隔. 则 $\lg(q^n)\approx\lg 10=1$,$\lg q\approx\frac{1}{n}$,$\lg(q^m)\approx\frac{m}{n}$. 计算结果如下:

$x=1.0001^m$	1	1.0001	1.0002	…	2.718146	…	10	2.74436
m	0	1	2	…	10000	…	23027	10096
$\lg x\approx\frac{m}{23027}$	0	0.000043	0.000087	…	0.43427	…	1	0.43844
$\ln x\approx\frac{m}{10000}$	0	0.0001	0.0002	…	1	…	2.3027	1.0096

x	2.78389	2.78417	…	3.58707	…	7.64001	…	10
m	10239	10240	…	12774	…	20335	…	23027
$\lg x$	0.44465	0.44470	…	0.55474	…	0.88309	…	1
$\ln x$	1.0239	1.0240	…	1.2774	…	2.0335	…	2.3027

查表得 $\lg\frac{7640}{2784}=\lg\frac{7.640}{2.784}$

$=\lg 7.640-\lg 2.784$

$=0.88309-0.44465=0.43844$

$\Rightarrow 7640\div 2784\approx 2.744.$

$\lg\sqrt[7]{7640}=(\lg 1000+\lg 7.640)\div 7$

$=(3+0.88309)\div 7=0.55473$

$\Rightarrow\sqrt[7]{7640}\approx 3.587.$

历史上第一本对数表就是由瑞士人别尔基用以上方法花了 8 年的时间编出来的. 他计算 1.0001 的各次幂 $1.0001^m=N$,得到的指数 $m=\log_{1.0001}N$ 实际上是以 1.0001 为底的对数. 再将它除以 $23027=\log_{1.0001}10$ 得到常用对数 $\lg N=\frac{\log_{1.0001}N}{\log_{1.0001}10}$,实际上是用换底公式换成以 10 为底的对数.

常用对数最大的优点是只需要编出 1 到 10 的对数,就能得到所有的对数. 例如以上计算$\sqrt[7]{7640}$的时候需要计算 lg7640. 7640 由 7.640 乘 1000 得到,lg7640 就由 lg7.640 加 $\lg 1000=3$ 得到.

用对数的时候以 10 为底比较方便,是因为人类采用 10 进位制. 编对数表的时候却需要以接近 1 的数为底,比如以 $q=1+\frac{1}{10000}$为底,它的两个相邻的正整数次幂 q^m 与 q^{m+1}才比较接近. 但这就产生一个问题,对数的值都太大了,10 的对数超过两万. 英格兰人纳皮尔为了提高精确度,用更接近 1 的 $q=1+\frac{1}{10000000}$为底,10 的对数超过两千

万.这就好比用尺子去量人的身高,如果以米为单位,身高超过 1 米,不到 2 米,量成 2 米,很不精确.在尺子上画上刻度将长度单位缩短到厘米,量出身高 165 厘米,就是 $\frac{165}{100}=1.65$ 米.编对数表,也就是用底 a 的幂去度量真数.a 太大,量不精确.a 越接近 1,量得越精确,量出来的对数也越大,应该将量出来的数适当缩小,回归正常.例如,别尔基用 1.0001 的幂 1.0001^m 去度量真数,$x=1.0001$.自己的对数不应该是 1 而应是 $x-1=0.0001$,所有的指数 m 应当除以 10000 才作为 $x\approx1.0001^m$ 的对数,$a=1.0001^{10000}\approx2.718$ 的对数才是 1,这个 a 才是对数的底.类似地,纳皮尔用 1.0000001 的幂度量真数,$x=1.0000001$ 自己的对数应是 $x-1=0.0000001$,对数的底 $a=1.0000001^{10000000}\approx2.71828169$ 与 $e\approx2.71828183$ 的误差 $<1.5\times10^{-7}$.别尔基的 $1.0001^{10000}\approx2.71815$ 的误差 $<1.4\times10^{-4}$.

简而言之:用 1.0001 的幂编出的对数表中,当 $x=1.0001^m$,则

(1)幂指数 $m=\log_{1.0001}x$ 是 1.0001 的对数.

(2)m 除以 $23027=\log_{1.0001}10$ 得到常用对数 $\frac{m}{23027}\approx\lg x$.

(3)m 除以 10000 得到自然对数的近似值 $\frac{m}{10000}=\log_a x\approx\ln x$,因为 $a=1.0001^{10000}\approx2.718$ 是 $e=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ 的近似值.

3.三角函数的幸运斜率

例 2 (浙江绍兴高考模拟试卷)已知 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$,$y\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$,且 $x\tan y=2(1-\cos x)$.则

A. $y<\frac{x}{4}$ B. $\frac{x}{4}<y<\frac{x}{2}$

C. $\frac{x}{2}<y<x$ D. $y>x$.

解 对任意 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$,有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

因此 $y<\tan y=\frac{2}{x}\cdot2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

$$<\frac{2}{x}\cdot2\left(\frac{x}{2}\right)^2=x;$$

将 $\sin y=\cos y\tan y$,$\sin\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

代入得

$$y>\sin y=\cos y\cdot\frac{2}{x}\cdot2\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2$$

$$>\cos y\cdot\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2(1+\cos x)$$

$$=\frac{x}{2}\cos y(1+\cos x),$$

由 $\cos y>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $\cos y(1+\cos x)>\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}>1$,

$y>\frac{x}{2}$.

答案:C.

例 2 看起来不涉及导数,其中关键的不等式 $\sin x<x<\tan x$ 却是三角函数导数公式最重要的基础,此题背后有玄机,绝非钻牛角尖.

什么是正弦和正切? 如图 2.以角 AOB 的顶点 O 为圆心画单位圆,弧 AB 的弧长 x 表示 $\angle AOB$.作直角三角形 ODB,OAT.则

$|DB|=\sin\angle AOB=\sin x$,

$|AT|=\tan\angle AOB=\tan x$.

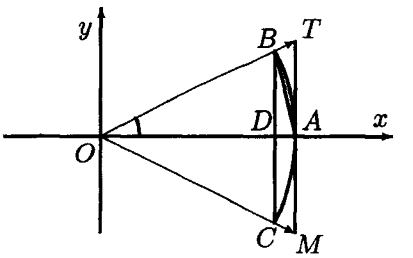


图 2

直角三角形 DAB 的直角边长 $|DB|<$ 斜边长 $|AB|<$ 弧长 AB.也就是 $\sin x<x$.也可以看出 $\tan x=|AT|>$ 弧长 $AB=x$.更确切的证明是利用面积不等式:$S_{\triangle OAB}<S_{扇形OAB}<S_{\triangle OAT}$.

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA||DB|=\frac{1}{2}\sin x,$$

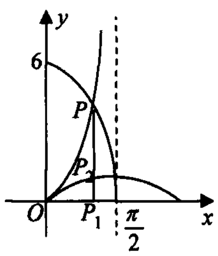
$$S_{\triangle OAT}=\frac{1}{2}|OA||AT|=\frac{1}{2}\tan x,$$

$$S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}|OA|\times弧长AB=\frac{1}{2}x;$$

因此 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow\sin x<x<\tan x$. (下转第 10 页)

$y=\sin x$ 的图像交于点 P_2，则求线段 P_1P_2 的长”这道题时，如果将条件转换为图形语言，再将图形语言转化为新的符号语言，那么立即可以破解：只要从 $6\cos x=5\tan x(0<x<\frac{\pi}{2})$ 中解出 $\sin x$ 的值 $\frac{2}{3}$，即为所求线段 P_1P_2 的长.



参考文献

[1]A. A. 斯托利亚尔. 数学教育学[M]. 北京：人民教育出版社，1985：224

[2]钟志华. 数学理解的层次[J]. 数学教学研究，2007(10)

[3]郑毓信，梁贯成. 认知科学建构主义与数学教育[M]. 上海：上海教育出版社，1998：148. 转引自《Language and Cognition》，Washington，DC：Winston，1981：35

[4][俄]列夫·谢苗诺维奇·维果斯基. 思维与语言[M]. 李维，译. 杭州：浙江教育出版社，1998：136，168

[5][俄]列夫·谢苗诺维奇·维果斯基. 思维与语言[M]. 李维，译. 杭州：浙江教育出版社，1998：156

[6]克莱因. 数学：确定性的丧失[M]. 李宏魁，译. 长沙：湖南科学技术出版社，1997：245

[7]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：2

[8]苏教版新课程编写组编写. 普通高中课程标准实验教科书·数学(必修1)[M]. 南京：凤凰出版传媒集团，江苏教育出版社，2012，6

(上接第4页)

由此不等式得到

$$\frac{\sin x}{x}<1<\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\leqslant1\leqslant\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.$$

作 DB 和圆弧 AB 关于 OA 的轴对称图形 DC，AC. 当 $\angle BOC$ 所对弧长 $BC=2x\to0$，

用弦长 $|BC|=2\sin x$ 代替弧长的相对误差

$$\frac{2x-2\sin x}{2x}\to0,$$

这就是 $\frac{\sin x}{x}\to1$，这就是刘徽割圆的原理.

由此得到，$f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\tan x$ 在 $x=0$ 的导数

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin0}{x-0}=1$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\tan0}{x-0}=g'(0).$$

曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 在 $(0,0)$ 有公切线 $y=x$. 如图3.

与 $y=\ln x$，$y=e^x$ 不同的是：正弦曲线和正切曲线并非始终在切线 $y=x$ 同一侧，而是在切点越过切线到了另一侧.

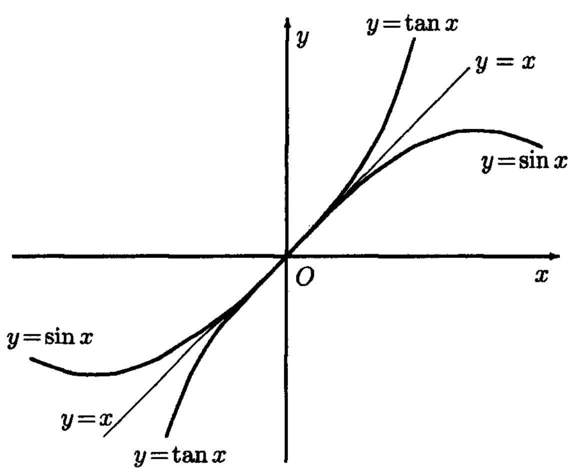


图3

对数曲线 $y=\ln x$ 在点$(1,0)$的切线斜率为1，是选择对数的底 $a=e$ 的结果. 正弦曲线 $y=\sin x$ 与正切曲线 $y=\tan x$ 在$(0,0)$的切线斜率等于1，则是用弧度制的结果. 正是由于用圆心角在单位圆周上所对的弧长 x 来度量角，当 $x\to0$ 时弦长 $2\sin x$ 与弧长 $2x$ 趋于相等，比趋于1，才导致了函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 的导数等于1.

正如当 x 很接近1时可以用 $x-1$ 作为 $\ln x$ 的近似值，例如 $\ln1.0001\approx1.0001-1=0.0001$. 当 x 很接近0时也可以用 x 的弧度数作为 $\sin x$ 的近似值. 例如 $\sin1^\circ=\sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}\approx0.01743$.