江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学周三练习（4）理科

2019. 9. 25

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、圆

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分.

1．设集合 $M=\{2,0,x\}$，集合 $N=\{0,1\}$，若 $N\subseteq M$，则 $x=$________.

2．若复数 $z=\dfrac{a+i}{i}$（其中 i 为虚数单位）的实部与虚部相等，则实数 $a=$________.

3．直线 $2\sqrt{3}x+2y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=2y$ 的公共点的个数为_______.

4．过点 $P(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为________.

5．已知角 α 的终边经过点 $P\ \ 8,y$ ，且 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 y 的值为________.

6．若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1，-2)$ 的夹角是 $180°$，且 $|\vec{b}|=3\sqrt{5}$，则 $\vec{b}=$________.

7．若变量 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\le 0\\ x-2y+3\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}$，则 2^{x+y} 的最大值为________.

8．若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$ 图象的两条相邻的对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，且该函数图象关于点 $(x_0,0)$ 成中心对称，$x_0\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，则 $x_0=$________.

9．若实数 x,y 满足 $x>y>0$，且 $\log_2 x+\log_2 y=1$，则 $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ 的最小值为________.

10．在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c. 已知 $b-c=\dfrac{1}{4}a$，$2\sin B=3\sin C$，则 $\cos A$ 的值为________.

11．已知圆 C 的圆心在 x 轴正半轴上，点 M（0，$\sqrt{5})$ 在圆 C 上，且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆 C 的方程为________.

12．已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2 & x\le 0\\ -x^2+2x-2a & x>0\end{cases}$. 若对任意 $x\in[-3，+\infty)$，$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

13．在平面直角坐标系 xOy 中，设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，若圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $r=$________.

14．若 $a>0,b>0$，且 $2a+b=1$，则 $\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的最小值为________.

二、解答题：

15.(本小题满分 14 分)

已知命题 p:方程 $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ 有两个不相等的实数根；命题 q: $2^{m+1}<4$.

(1)若 p 为真命题，求实数 m 的取值范围；

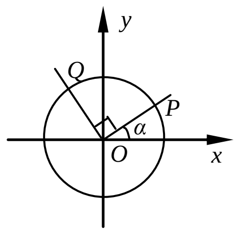
(2)若 $p\vee q$ 为真命题， $p\wedge q$ 为假命题，求实数 m 的取值范围.

16．(本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，设锐角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P(x_1,y_1)$，将射线 OP 绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后与单位圆交于点 $Q(x_2,y_2)$. 记 $f(\alpha)=y_1+y_2$.

（1）求函数 $f(\alpha)$ 的值域；

（2）设 ΔABC 的角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $f(C)=\sqrt{2}$，且 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，求 b.



第 16 题图

17．(本小题满分 15 分)

在平面直角坐标系中，设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=\left(\sin(\alpha+\frac{\pi}{6}),\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\right)$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

（1）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 α 的值；

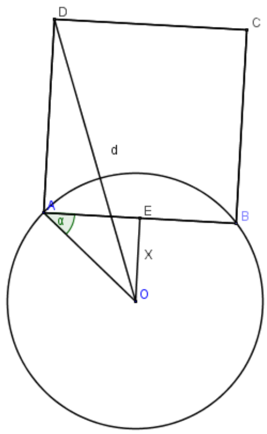
（2）若 $\tan 2\alpha=-\frac{1}{7}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值.

18．（本小题满分 15 分）

某飞机失联，经卫星侦查，其最后出现在小岛 O 附近.现派出四艘搜救船 A,B,C,D，为方便联络，船 A,B 始终在以小岛 O 为圆心，100 海里为半径的圆上，船 A,B,C,D 构成正方形编队展开搜索，小岛 O 在正方形编队外（如图）.设小岛 O 到 AB 的距离为 x，$\angle AOB=\alpha,D$ 船到小岛 O 的距离为 d.

（1）请分别求 d 关于 x,α 的函数关系式 $d=g(x),d=f(\alpha)$；并分别写出定义域；

（2）当 A,B 两艘船之间的距离是多少时搜救范围最大（即 d 最大）.



19．（本小题满分 16 分）

已知圆 M ： $x^2-2ax+y^2=0$，直线 l ： $8x-6y-3=0$ 被圆 M 截得的弦长为 $\sqrt{3}$，且圆心 M 在直线 l 的下方.

（1）求实数 a 的值；

（2）过点 $P(2,4)$ 作圆 M 的切线 m，求切线 m 的方程；

（3）已知点 $A(-5,0)$，O 为坐标原点， Q 为圆 M 上任意一点，在 x 轴上是否存在异于 A 点的 B 点，使得 $\dfrac{QB}{QA}$ 为常数，若存在，求出点 B 坐标，不存在说明理由.

20.(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=(x-a)^2e^x+b$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y-1=0$，函数 $g(x)=x-k(\ln x-1)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求函数 $g(x)$ 的极值；

（3）设 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(\min\{p,q\}$表示p,q中的最小值$)$，若 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有三个零点，求实数 k 的取值范围.

高三数学周三练习（4）理科

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分.

1．1；　　2．－1；　　3．2；　　4．$2x+y-1=0$；　　5．± 6；

6．$(-3，6)$；　　7．8；　　8．$\dfrac{5\pi}{12}$；　　9．4；　　10．$-\dfrac{1}{4}$；

11．$(x-2)^2+y^2=9$；　　12．$[\dfrac{1}{8}，2]$；13．$\sqrt{10}$　　14. $5+2\sqrt{2}$

二、解答题：

15. (本小题满分 14 分)

已知命题 p:方程 $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ 有两个不相等的实数根；命题 q: $2^{m+1}<4$.

(1)若 p 为真命题，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $p\vee q$ 为真命题， $p\wedge q$ 为假命题，求实数 m 的取值范围.

解．（1）若 p 为真命题，则应有 $\Delta=8-4m>0$，解得 $m<2$.

（2）若 q 为真命题，则有 $m+1<2$，即 $m<1$，……………………………6 分

因为 $p\vee q$ 为真命题， $p\wedge q$ 为假命题，

则 p,q 应一真一假. …………………………………………………………7 分

①当 p 真 q 假时，有 $\begin{cases} m<2 \\ m\geqslant 1 \end{cases}$，得 $1\leqslant m<2$；…………………………10 分

②当 p 假 q 真时，有 $\begin{cases} m\geqslant 2 \\ m<1 \end{cases}$，无解. ………………………………………13 分

综上， m 的取值范围是 $[1,2)$. ……………………………………………14 分

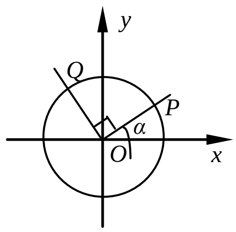
16．(本小题满分 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，设锐角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P(x_1,y_1)$，将射线 OP 绕坐标原点 O 按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后与单位圆交于点 $Q(x_2,y_2)$. 记 $f(\alpha)=y_1+y_2$.

（1）求函数 $f(\alpha)$ 的值域;

（2）设 ΔABC 的角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，

若 $f(C)=\sqrt{2}$，且 $a=\sqrt{2}$， $c=1$，求 b.



第 16 题图

解：（1）由题意，得 $y_1=\sin\alpha, y_2=\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})=\cos\alpha$，　　………4 分

所以 $f(\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，　　………………6 分

因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$，故 $f(\alpha)\in(1,\sqrt{2}]$.　　……………

8 分

（2）因为 $f(C)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$，又 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$， ………………
10 分

在 ΔABC 中，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $1=2+b^2-2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}b$，

解得 $b=1$． ………………14 分

（说明：第（2）小题用正弦定理处理的，类似给分）

17．(本小题满分 15 分)

在平面直角坐标系中，设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=\left(\sin(\alpha+\frac{\pi}{6}),\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\right)$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$．

（1）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 α 的值；

（2）若 $\tan 2\alpha=-\frac{1}{7}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值．

【解】（1）因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，

所以 $\cos\alpha\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})-\sin\alpha\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=0$， ……………2 分

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=0$． ……………………………………………………4 分

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$．

于是 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$． ……………………………………………………………7 分

（2）因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<2\alpha<\pi$，又 $\tan 2\alpha=-\frac{1}{7}<0$，故 $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$．

因为 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{1}{7}$，所以 $\cos 2\alpha=-7\sin 2\alpha<0$，

又 $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，

解得 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos 2\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$． ………………………………11 分

因此，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+\sin\alpha\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})$ ………13 分

$=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-7\sqrt{2}}{20}$． …………………15 分

18．（本小题满分 15 分）

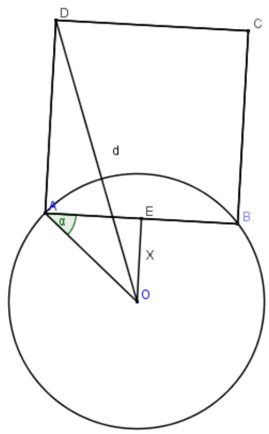
某飞机失联，经卫星侦查，其最后出现在小岛 O 附近.现派出四艘搜救船 A,B,C,D，为方便联

络，船 A,B 始终在以小岛 O 为圆心，100 海里为半径的圆上，船 A,B,C,D 构成正方形编队展开搜索，小岛 O 在正方形编队外（如图）.设小岛 O 到 AB 的距离为 x，$\angle AOB=\alpha$, D 船到小岛 O 的距离为 d .

（1）请分别求 d 关于 x,α 的函数关系式 $d=g(x),d=f(\alpha)$；并分别写出定义域;

（2）当 A,B 两艘船之间的距离是多少时搜救范围最大（即 d 最大）.

解：设 x 的单位为百海里



（1）由 $\angle OAB=\alpha$， $AB=2OA\cos A=2\cos A$，

$AD=AB=2\cos\alpha$，　**……2 分**

在△ AOD 中，

$$OD=f(\alpha)=\sqrt{OA^2+OB^2-2\times OA\times OB\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\sqrt{1+4\cos^2\alpha+4\cos\alpha\sin\alpha}\ ;\quad \alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$$

（定义域 1 分）

若小岛 O 到 AB 的距离为 x， $AB=2\sqrt{1^2-x^2}$，　**……6 分**

$$OD=g(x)=\sqrt{(x+\frac{AD}{2})^2+(\frac{AB}{2})^2}$$　**……8 分**

$$=\sqrt{-x^2+2x\sqrt{1-x^2}+2}\ ,\quad x\in(0,1)$$　（定义域 1 分）　**……10 分**

（2）$OD^2=4\cos^2\alpha+1+4\cos\alpha\sin\alpha$； $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$=4\times\frac{1+\cos2\alpha}{2}+1+4\times\frac{\sin2\alpha}{2}=2(\sin2\alpha+\cos2\alpha)+3$$

$$=2\sqrt{2}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})+3,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}).$$　**……12 分**

当 $2\alpha+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，则 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha=\frac{\pi}{8}$， OD 取得最大值，　**……13 分**

此时 $AB=2\cos\frac{\pi}{8}=2\times\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$（百海里）.　**……14 分**

答：当 AB 间距离 $100\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 海里时，搜救范围最大.　**……15 分**

19．（本小题满分 16 分）

已知圆 M ： $x^2-2ax+y^2=0$，直线 l ： $8x-6y-3=0$ 被圆 M 截得的弦长为 $\sqrt{3}$，且圆心 M 在直线 l 的下方.

（1）求实数 a 的值；

（2）过点 $P(2,4)$ 作圆 M 的切线 m ，求切线 m 的方程；

（3）已知点 $A(-5,0)$, O 为坐标原点， Q 为圆 M 上任意一点，在 x 轴上是否存在异于 A 点的 B 点，使得 $\dfrac{QB}{QA}$ 为常数，若存在，求出点 B 坐标，不存在说明理由.

19. 解: （Ⅰ）设圆心 $M(a,0)$，由已知得点 M 到直线 l：$8x-6y-3=0$ 的距离为

$$\frac{|8a-3|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}}\ .$$ ……………………2 分

即 $9a^2+12a-21=0,$ 又点 M 在直线 l 的下方，$\therefore 8a-3>0$，

$\therefore a=1$ ……………4 分

（Ⅱ）①当直线 m 的斜率不存在时，直线 m 的方程 $x=2$； ……………………6 分

②直线 m 的斜率存在时，设直线 m 的方程为 $y=k(x-2)+4$，

则有 $\dfrac{|-k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，$\therefore k=\dfrac{15}{8}$，$\therefore$直线 m 的方程为 $15x-8y+2=0$，

综上所述，可得直线 m 的方程为 $x=2$ 或 $15x-8y+2=0$. ……………9 分

（Ⅲ）假设存在这样的点 B $(t,0)$，使得 $\dfrac{QB}{QA}$ 为常数 λ，则 $QB^2=\lambda^2QA^2$ ……………11 分

即 $(x-t)^2+y^2=\lambda^2[(x+5)^2+y^2]$ ……①，又 $x^2+y^2=2x$ ……②

由①②可得 $(12\lambda^2+2t+2)x+25\lambda^2-t^2=0$ 对任意 $x\in[0,2]$ 恒成立， ……………13 分

所以 $\begin{cases}12\lambda^2+2t-2=0\\25\lambda^2-t^2=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{6},\\t=\dfrac{5}{6}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=-1,\\t=-5\end{cases}$（舍去） 或 $\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{6},\\t=\dfrac{5}{6}\end{cases}$（舍去） 或 $\begin{cases}\lambda=1,\\t=-5\end{cases}$（舍去）

……………………………………15 分

所以存在点 B($\frac{5}{6}$,0)，对于圆上任意一点 Q 都有 $\frac{QB}{QA}$ 为常数. ⋯ ⋯16 分

20.(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=(x-a)^2e^x+b$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y-1=0$，函数

$g(x)=x-k(\ln x-1)$.

（4）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（5）求函数 $g(x)$ 的极值；

（6）设 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ $(\min\{p,q\}表示p,q中的最小值)$，若 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有三个零点，求实数 k 的取值范围.

20．解：（1）$f'(x)=\left[x^2+(2-2a)x+a^2-2a\right]e^x$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y-1=0$

所以 $\begin{cases} f'(0)=a^2-2a=-1 \\ f(0)=a^2+b=1 \end{cases}$， ………………2 分

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

所以 $f(x)=(x-1)^2e^x$ ………………3 分

（2）$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$g'(x)=\frac{x-k}{x}$

①若 $k\le 0$ 时，则 $g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值 …………5 分

②若 $k>0$ 时，则

当 $0<x<k$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,k)$ 上单调递减；

当 $x>k$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(k,+\infty)$ 上单调递增；

所以当 $x=k$ 时，$g(x)$ 有极小值 $2k-k\ln k$，无极大值． …………7 分

(3) 因为 $f(x)=0$ 仅有一个零点 1，且 $f(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有仅两个不等于 1 的零点． ……8 分

①当 $k\leq 0$ 时，由(2)知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多一个零点，不合题意，舍去

②当 $0<k<e^2$ 时，$g(x)_{\min}=g(k)=k(2-\ln k)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点

③当 $k=e^2$ 时，$g(x)\geq 0$，当且仅当 $x=e^2$ 等号成立，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 仅一个零点

……11 分

④当 $k>e^2$ 时，$g(k)=k(2-\ln k)<0$，$g(e)=e>0$，所以 $g(k)\cdot g(e)<0$，

又 $g(x)$ 图象不间断，$g(x)$ 在 $(0,k)$ 上单调递减

故存在 $x_1\in(e,k)$，使 $g(x_1)=0$ …………13 分

又 $g(k^2)=k(k-2\ln k+1)$

下面证明，当 $x>e^2$ 时，$h(x)=x-2\ln x+1>0$

$h'(x)=\dfrac{x-2}{x}>0$，$h(x)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递增

$h(x)>h(e^2)=e^2-3>0$

所以 $g(k^2)=k\cdot(k-2\ln k+1)>0$，$g(k)\cdot g(k^2)<0$

又 $g(x)$ 图象在 $(0,+\infty)$ 上不间断，$g(x)$ 在 $(k,+\infty)$ 上单调递增，

故存在 $x_2\in(k,k^2)$，使 $g(x_2)=0$ …………15 分

综上可知，满足题意的 k 的范围是 $(e^2,+\infty)$ ……16 分