江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（10）　　12.6

班级 ________　　　　姓名________

1．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$．

（1）求角 A 的大小；

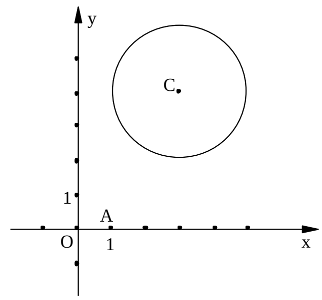
（2）若 $\cos(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，求 cosC 的值．

2. 已知圆C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$，直线 l_1 过定点A（1，0）.

（Ⅰ）若 l_1 与圆C相切，求 l_1 的方程；

（Ⅱ）若 l_1 的倾斜角为45°，l_1 与圆C相交于P，Q两点，求线段PQ的中点M的坐标；

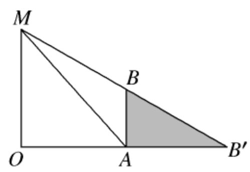
（Ⅲ）若 l_1 与圆C相交于P，Q两点，求三角形CPQ的面积的最大值，并求此时直线 l_1 的方程.



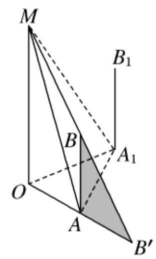
3．已知小明(如图中①AB所示)身高1.8米，路灯OM高3.6米，AB，OM均垂直于水平地面，分别与地面交于点A，O.点光源从M发出，小明在地面上的影子记作AB'.

(1)小明沿着圆心为O，半径为3米的圆周在地面上走一圈，求AB'扫过的图形面积；

(2)若$OA=3$米，小明从A出发，以1米/秒的速度沿线段AA_1走到A_1，$\angle OAA_1=\frac{\pi}{3}$，且$AA_1=10$米，如图②所示．$t$秒时，小明在地面上的影子长度记为$f(t)$(单位：米)，求$f(t)$的表达式与最小值．



图①



图②

4．设数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，且满足 $a_1=2$，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}=(p-1)S_n+2$(其中常数$p>1$)，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$.

(1)求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2)若 $p=2^{\frac{2}{2017}}$，求 $b_{2\,018}$的值；

(3)若$\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得 $p=2^{\frac{2}{2k+1}}$，记 $c_n=\left|b_n-\dfrac{3}{2}\right|$，求数列$\{c_n\}$的前 $2(k+1)$项的和.

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练（10）答案　 12.6

1、

解:（1）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，且 $\frac{\sqrt{3}a}{c}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$，　　　……1 分

得 $\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C}=\frac{2-\cos A}{\sin C}$，　　　……2 分

则有 $\sqrt{3}\sin A=2-\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，$2\sin(A+\frac{\pi}{6})=2$，

则 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，　　　……4 分

因为 $A\in(0,\ \pi)$，则 $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，则 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$.　　　……6 分

（2）在△ ABC 中，因为 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $B\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，则 $\sin(B+\frac{\pi}{6})>0$.

又因为 $\cos(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，则 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\cos^2(B+\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.　　　……8 分

又在△ ABC 中，$A+B+C=\pi$，　　　……9 分

所以 $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos(A+B)=-\cos(B+\frac{\pi}{3})$　　　……10 分

$=-\cos[(B+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=-\cos(B+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(B+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

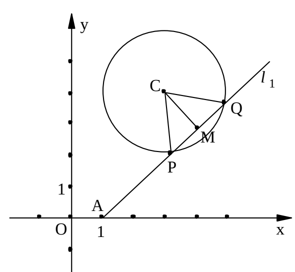
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$.　　　……14 分

2、解:（Ⅰ）①若直线 l_1 的斜率不存在，则直线 l_1：x＝1，符合题意.

②若直线 l_1 斜率存在，设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-1)$，即 $kx-y-k=0$.

由题意知，圆心（3，4）到已知直线 l_1 的距离等于半径 2，即: $\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解之得 $k=\frac{3}{4}$. 所求直线 l_1 的方程是 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

（Ⅱ）直线 l_1 方程为 y＝x－1. ∵PQ⊥CM，　∴ CM 方程为 $y-4=-(x-3)$，即 $x+y-7=0$.



$\because \begin{cases} y = x-1, \\ x+y-7=0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$ $\therefore$ M 点的坐标为(4, 3).

(Ⅲ) 直线与圆相交，斜率必定存在，且不为 0, 设直线方程为 $kx-y-k=0$，

则圆心到直线 l_1 的距离 $d=\dfrac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}$

又∵△CPQ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}d\times 2\sqrt{4-d^2}=d\sqrt{4-d^2}=\sqrt{4d^2-d^4}=\sqrt{-(d^2-2)^2+4}$

∴ 当 $d=\sqrt{2}$ 时，S 取得最大值 2. $\therefore d=\dfrac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$ ∴ k＝1 或 k＝7

所求直线 l_1 方程为 x－y－1＝0 或 7x－y－7＝0 .

3、解：(1) 由题意 $AB \parallel OM$，$\dfrac{AB'}{OB'}=\dfrac{AB}{OM}=\dfrac{1.8}{3.6}=\dfrac{1}{2}$，$OA=3$，所以 $OB'=6$.

小明在地面上的身影 AB' 扫过的图形是圆环，其面积为 $\pi\times 6^2-\pi\times 3^2=27\pi$(平方米).

(2) 经过 t 秒，小明走到了 A_0 处，身影为 A_0B_0'，

由(1)知 $\dfrac{A_0B_0'}{OB_0'}=\dfrac{AB}{OM}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $f(t)=A_0B_0'=OA_0$

$=\sqrt{OA^2+AA_0^2-2OA\cdot AA_0\cos\angle OAA_0}$,

化简得 $f(t)=\sqrt{t^2-3t+9}=\sqrt{\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}}$，$0<t\leqslant 10$,

当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(t)$ 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

答：$f(t)=\sqrt{t^2-3t+9}$，$0<t\leqslant 10$，当 $t=\dfrac{3}{2}$(秒)时，$f(t)$ 的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$(米).

4、(1)证明　因为 $\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}=(p-1)S_n+2$，

$a_{n+2}=(p-1)S_{n+1}+2$，

所以两式相减得 $a_{n+2}-a_{n+1}=(p-1)a_{n+1}$，

即 $a_{n+2}=pa_{n+1}$，

当 $n=1$ 时，$a_2=(p-1)a_1+2=pa_1$，

所以 $a_{n+1}=pa_n(n\in \mathbf{N}^*)$，

又 $a_1=2$，$p>1$，

所以$\{a_n\}$是以 2 为首项，p 为公比的等比数列.

(2)解　由(1)得 $a_n=2p^{n-1}$.

$b_n=\frac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)=\frac{1}{n}\log_2\left[2^n p^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$=\frac{1}{n}\left[n+\frac{n(n-1)}{2\,017}\right]$

所以 $b_{2\,018}=2$.

(3)解　由(1)得 $a_n=2p^{n-1}$.

$b_n=\frac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)=\frac{1}{n}\log_2\left[2^n p^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$=\frac{1}{n}\log_2\left[2^n\times 2^{\frac{n(n-1)}{2k+1}}\right]=1+\frac{n-1}{2k+1}$.

因为 $b_n-\frac{3}{2}=\frac{2n-2k-3}{2(2k+1)}$,

所以当 $1\leqslant n\leqslant k+1$ 时，$c_n=\frac{3}{2}-b_n$,

当 $n\geqslant k+2$ 时，$c_n=b_n-\frac{3}{2}$.

因此数列$\{c_n\}$的前 $2(k+1)$项的和 T_{2k+2}

$=-(b_1+b_2+\cdots+b_{k+1})+(b_{k+2}+b_{k+3}+\cdots+b_{2k+2})$

$=-\frac{0+1+\cdots+k}{2k+1}+\frac{(k+1)+(k+2)+\cdots+2k+1}{2k+1}$

$=-\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{2k+1}+\frac{\frac{(k+1)(k+2k+2)}{2}}{2k+1}=\frac{(k+1)^2}{2k+1}$.