

微专题 填空题的解法

【真题感悟】

- (2018·全国Ⅱ)若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 上是减函数,则 a 的最大值是_____.
- (2018·天津)已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解,则 a 的取值范围是_____.
- (2017·新课标Ⅲ改编)在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1, AD = 2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为_____.
- (2016·新课标Ⅱ)已知函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ _____.

【典题导引】

(一) 直接求解法

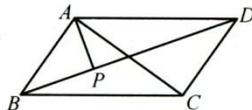
直接从题设条件出发,利用定义、性质、定理、公式等,经过变形、推理、计算、判断得到结论的,称之为直接求解法.它是解填空题的常用基本方法.使用直接法解填空题,要善于透过现象抓本质,自觉地、有意识地采取灵活、简捷的解法.

- 例 1** (1) (2015·江苏)设复数 z 满足 $z^2 = 3 + 4i$ (i 是虚数单位),则 z 的模为_____.
- (2) 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数,且 $f(1) = 1$,若 $g(x) = f(x) + 2$,则 $g(-1) =$ _____.
- (3) 已知向量 $\mathbf{a} = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{b} = (\sqrt{3}, 1)$,则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最大值与最小值之和为_____.
- (4) 已知函数 $f(x) = mx^2 + \ln x - 2x$ 在定义域内不是单调函数,则实数 m 的取值范围是_____.

(二) 特殊化法

当填空题的结论唯一或其值为定值时,我们只需把题中的参变量用特殊值(或特殊函数、特殊角、特殊数列、图形特殊位置、特殊点、特殊方程、特殊模型等)代替,即可得到结论.一般性存在于特殊性之中,只要是求一般性的问题,绝大多数可以用特殊化法来解决.

- 例 2** (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0, \\ ax^2 + bx, & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数,则函数 $g(x) = bx + \frac{3a}{x}$ 上任一点处的切线与直线 $x = 0$ 和直线 $y = x$ 所围成的三角形面积为_____.
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中,点 O 是 BC 的中点,过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N ,若 $\vec{AB} = m\vec{AM}, \vec{AC} = n\vec{AN}$,则 $m + n$ 的值为_____.
- (3) 设 $a \in \mathbf{R}$,若 $x > 0$ 时,均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$,则 $a =$ _____.
- (4) 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$,垂足为 P ,且 $AP = 3$,则 $\vec{AP} \cdot \vec{AC} =$ _____.



(例 2(4)图)

(5) 观察下列等式:

- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$;
 - $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$;
 - $\cos 6\alpha = 32 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1$;
 - $\cos 8\alpha = 128 \cos^8 \alpha - 256 \cos^6 \alpha + 160 \cos^4 \alpha - 32 \cos^2 \alpha + 1$;
 - $\cos 10\alpha = m \cos^{10} \alpha - 1280 \cos^8 \alpha + 1120 \cos^6 \alpha + n \cos^4 \alpha + p \cos^2 \alpha - 1$.
- 可以推测, $m - n + p =$ _____.

(6) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 $A(2, \sqrt{2})$, 点 B 是椭圆上任意一点(异于点 A), 过点 B 作与直线 OA 平行的直线 l 交椭圆于点 C , 当直线 AB, AC 斜率都存在时, $k_{AB} + k_{AC} =$ _____.

(7) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是 _____.

(三) 数形结合法

借助图形的直观性, 通过数与形的关系, 迅速作出判断的方法称为数形结合法. 文氏图、三角函数线、函数的图象及方程的曲线等, 都是常用的图形.

例 3 (1) 已知函数 $f(x) = 2^x + x, g(x) = \log_2 x + x, h(x) = x^3 + x$ 的零点依次为 a, b, c , 则 a, b, c 由小到大的顺序是 _____.

(2) 满足条件 $AB=2, AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值为 _____.

(3) 若方程 $\lg(kx) = 2\lg(x+1)$ 仅有一个实根, 那么 k 的取值范围是 _____.

(四) 构造模型法

例 4 (1) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} + 2\cos x + 3\sin x + 4}{\cos x + 2} (x \in \mathbf{R})$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m =$ _____.

(2) 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=\sqrt{13}, AC=BD=5, AD=BC=2\sqrt{5}$, 则该四面体的体积 $V =$ _____.

(3) 已知定义在 \mathbf{R} 上的可导函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x) < f(x)$ 且 $y=f(x+1)$ 为偶函数, $f(2)=1$, 则不等式 $f(x) < e^x$ 的解集为 _____.

(4) (2015·泰州一模) 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2, c \neq 0$, 则 $\frac{b}{a-2c}$ 的取值范围为 _____.