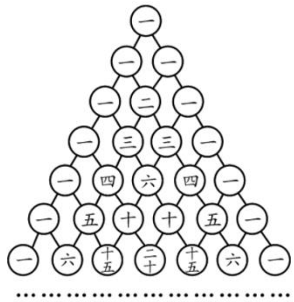
高二数学中档题小练（21.4.20）

限时：60 分钟

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一．单选题（本大题共 6 小题）

1. 我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中，用如图的数表列出了一些正整数在三角形中的一种几何排列，俗称“杨辉三角形”.若将这些数字依次排列构成数列 1，1，1，1，2，1，1，3，3，1，1，4，6，4，1，...，则此数列的第 2020 项为(　)



A. C_{63}^{3}　　B. C_{63}^{4}　　C. C_{64}^{3}　　D. C_{64}^{4}

2. 在$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6}$的二项展开式中，$x^2$的系数为(　)

A. $-\frac{15}{4}$　　B. $\frac{15}{4}$　　C. $-\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

3. 在某场新冠肺炎疫情视频会议中，甲、乙、丙、丁、戊五位疫情防控专家轮流发言，其中甲必须排在前两位，丙、丁必须排在一起，则这五位专家的不同发言顺序共有(　　)

A. 8 种　　B. 12 种　　C. 20 种　　D. 24 种

4. 若直线$y=x$与曲线$y=e^{2x+m}$($m\in R,e$为自然对数的底数)相切，则$m=$(　　)

A. -2　　B. $-1-\ln 2$　　C. $-\ln 2$　　D. 2

5．函数$f(x)=x^2-\cos x$在区间$(k,k+1)$上存在零点，其中$k\in Z$，则k的值为(　　)

A. -2　　B. -2或-1　　C. -1　　D. -1或0

6．现有5名志愿者被分配到3个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动，要求每人只能去一个巡查点，每个巡查点至少有一人，则不同分配方案的总数为(　　)

A. 120　　B. 150　　C. 240　　D. 300

二．不定项选择题（本大题共 2 小题）

7. 对函数$f(x)=x^3-3x^2$下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)$的单调区间为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　　B. $f(x)$的单调减区间为$(0,2)$

C. 关于点$(1,-2)$对称　　D. $P(m,n)$为$f(x)$上任一点，则过点P都能作两条不同的直线与$f(x)$相切

8．关于多项式的$(1+\frac{2}{x}-x)^6$展开式，下列结论正确的是(　)

A. 各项系数之和为 1　　B. 各项系数的绝对值之和为2^{12}

C. 不存在常数项　　D. x^3的系数为 40

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 若$(1-4x)^{2017}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2017}x^{2017}$，则$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2017}}{2^{2017}}$的值是________.

10. 春节文艺汇演中需要将A,B,C,D,E,F六个节目进行排序，若A,B两个节目必须相邻，且都不能排在3号位置，则不同的排序方式有______种.(用数字作答)

11. 若复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_2|=3$，$|z_1+z_2|=3\sqrt{2}$，则$|2z_1-z_2|$的值是 ________.

四、解答题（本大题共 3 小题）

12. 已知虚数$z=a+bi(a,b\in R,b\neq 0)$满足$z+\dfrac{2}{z}\in \mathbf{R}$.

(1) 求$|z|$　　　(2) 若$a(z-\dfrac{2}{z})=i$，求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的值.

13. 已知在$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$的展开式中第 6 项为常数项.

(1) 求展开式中所有项的二项式系数和；

(2) 求展开式中所有项的系数和；

(3) 求展开式中所有的有理项.

14. 已知函数$f(x)=ae^x+2xe^{-x}(a\in R)$．

（Ⅰ）若$x=1$为$f(x)$的极值点，求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）当$x>0$时，$f(x)<4a+1$，求a的取值范围.

高二数学中档题小练（21.4.20）

限时：60 分钟

范围：导数及其应用、复数、综合法求角和距离、排列组合二项式定理

一．单选题（本大题共 6 小题）

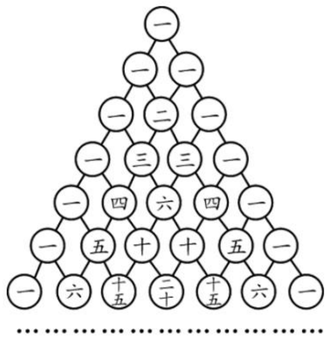
1. 我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中，用如图的数表列出了一些正整数在三角形中的一种几何排列，俗称“杨辉三角形”.若将这些数字依次排列构成数列 1，1，1，1，2，1，1，3，3，1，1，4，6，4，1，...，则此数列的第 2020 项为(　)

A. C_{63}^{3}　　B. C_{63}^{4}　　C. C_{64}^{3}　　D. C_{64}^{4}

【答案】A

【解析】

【分析】



本题考查杨辉三角以及等差数列求和，属于基础题.

直接利用二项式定理，等差数列的前 n 项和公式求出结果.

【解答】

解：由“杨辉三角”可知第一行一个数，第二行 2 个数，...，第 n 行 n 个数.

所以前 n 行有$\frac{n(n+1)}{2}$个数.

当$n=63$时，$\frac{63\times(63+1)}{2}=2016$.

所以第 2020 项是第 64 行的第 4 个数，即为C_{63}^{3}.

故选 A.

2. 在$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6}$的二项展开式中，$x^2$的系数为(　)

A. $-\frac{15}{4}$　　B. $\frac{15}{4}$　　C. $-\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了二项式定理的应用问题，也考查了利用通项公式求特定项的问题，是基础题目，利用二项展开式的通项公式求出求出展开式中含x^2项的系数即可.

【解答】

解：$(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$二项展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_6^r\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{6-r}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{r}=(-2)^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}\cdot C_6^r\cdot x^{3-r}$，

令$3-r=2$，可得$r=1$，所以展开式中含x^2项的系数为：$(-2)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}\cdot C_6^1=-\frac{3}{8}$.

故选 C.

3. 在某场新冠肺炎疫情视频会议中，甲、乙、丙、丁、戊五位疫情防控专家轮流发言，其中甲必须排在前两位，丙、丁必须排在一起，则这五位专家的不同发言顺序共有(　　)

A. 8 种　　B. 12 种　　C. 20 种　　D. 24 种

【参考答案】 C

【试题解析】【分析】
本题考查排列组合的综合应用与分类加法计数原理，属基础题．
分甲排在第一位以及甲排在第二位的情况分别讨论得出答案．
【解答】
解：当甲排在第一位时，共有$\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_2^2=12$种发言顺序，
当甲排在第二位时，共有$\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_2^2=8$种发言顺序，
所以一共有$12+8=20$种不同的发言顺序．故选C．

4．若直线$y=x$与曲线$y=e^{2x+m}(m\in R,e$为自然对数的底数$)$相切，则$m=($　　$)$

A．-2　　B．$-1-\ln 2$　　C．$-\ln 2$　　D．2

【参考答案】 B
【试题解析】【分析】
本题以直线与曲线相切为载体，考查了利用导数研究曲线上过某点切线方程的斜率，解题的关键是正确理解导数的几何意义．
设切点为(x_0,y_0)，则$x_0=y_0$，先求导函数，利用直线$y=x$与曲线$y=e^{2x+m}$相切，可知切线的斜率为1，可得切点处的函数值为$y_0{=}e^{2x_0+m}$，综合得出m的值．
【解答】
解：设切点为(x_0,y_0)，则$x_0=y_0$，
$\because y=e^{2x+m}$，$\therefore y'=2e^{2x+m}$
$\therefore 2e^{2x_0+m}=1$，即$e^{2x_0+m}=\dfrac{1}{2}$，

又$y_0{=}e^{2x_0+m}{=}x_0{=}\dfrac{1}{2}$可得：$m=-1-\ln 2$，故选：$B$．

5．函数$f(x)=x^2-\cos x$在区间$(k,k+1)$上存在零点，其中$k\in Z$，则k的值为$($　　$)$

A．-2　　B．-2或-1　　C．-1　　D．-1或0

【参考答案】 D
【试题解析】【分析】
本题考查了函数零点存在性定理，涉及函数奇偶性的运用，考查了分析和运算能力，属于基础题．
先判断函数$f(x)=x^2-\cos x$为偶函数，再根据$f(0)<0$，$f(1)>0$，且$f(x)$在$(0,1)$上连续，即可得到$f(x)$在$(0,1)$上存在零点，再结合偶函数性质可得$f(x)$在$(-1,0)$上存在零点，从而求解k值．
【解答】
解：由题意，函数$f(x)=x^2-\cos x$定义域为R，关于原点对称，
且$f(-x)=x^2-\cos x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，
又$f(0)=-1<0$，$f(1)=1-\cos 1>0$，且$f(x)$在$(0,1)$上连续，所以$f(x)$在$(0,1)$上存在零点，
当$x\geqslant 1$时，$f(x)=x^2-\cos x>0$，即$f(x)$在$[1,+\infty)$上无零点，
根据偶函数性质可得$f(x)$在$(-1,0)$上存在零点，
因为函数$f(x)=x^2-\cos\ x$在区间$(k,k+1)$上存在零点，其中$k\in Z$，所以$k=-1$或$k=0$．
故选D．

6．现有5名志愿者被分配到3个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动，要求每人只能去一个巡查点，每个巡查点至少有一人，则不同分配方案的总数为$($　　$)$

A．120　　B．150　　C．240　　D．300

【参考答案】 B
【试题解析】【分析】
本题主要考查排列，组合的综合应用，掌握排列，组合的应用是解答本题的关键．
由5名志愿者被分配到3个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动，若按3，1，1，分组，则为$C_5^3A_3^3$，若按2，2，1分组，

则为$\dfrac{C_5^2C_3^2}{2}\cdot A_3^3$，从而解答即可.

【解答】

解：由题意得，不同分配方案有$C_5^3A_3^3+\dfrac{C_5^2C_3^2}{2}\cdot A_3^3=150(种)$，故选：$B$.

二．不定项选择题（本大题共 2 小题）

7．对函数$f(x)=x^3-3x^2$下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)$的单调区间为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

B. $f(x)$的单调减区间为$(0,2)$

C. 关于点$(1,-2)$对称

D. $P(m,n)$为$f(x)$上任一点，则过点P都能作两条不同的直线与$f(x)$相切

【参考答案】 BC

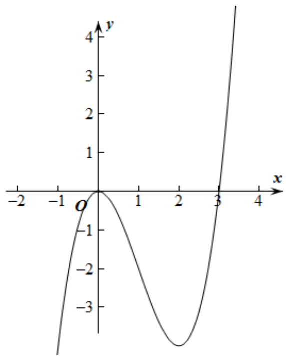
【试题解析】

【分析】

本题主要考查了利用导数求函数的单调区间，以及导数的几何意义，属于中档题.

对$f(x)$求导可得$f'(x)=3x^2-6x$，由$f'(x)>0$和$f'(x)<0$可得$f(x)$的单调区间，可判断选项 A、B；若$f(x)$关于点$(1,-2)$对称可得$x_2=2-x_1$，计算$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$可判断选项 C；举反例当$P(0,0)$时，仅有$y=0$一条切线，即可得正确选项.

【解答】



解：对$f(x)$求导可得$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

令$f'(x)>0$可得$x>2$或$x<0$，

令$f'(x)<0$可得$0<x<2$，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$单调递增，在$(0,2)$单调递减，

对于选项 A：单调区间不能并，故选项 A 不正确；

对于选项 B：$f(x)$的单调减区间为$(0,2)$，故选项 B 正确；

对于选项 C：令$\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$，即$x_2=2-x_1$，则$f(x_1)=x_1^3-3x_1^2$，

$f(x_2)=x_2^3-3x_2^2=(2-x_1)^3-3(2-x_1)^2=-x_1^3+3x_1^2-4$，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=-2$，即$f(x)$关于点$(1,-2)$对称，故选项 C 正确；

对于选项 D：当$P(0,0)$时，仅有$y=0$一条切线，故选项 D 不正确，

故选：BC.

8．关于多项式的$(1+\frac{2}{x}-x)^6$展开式，下列结论正确的是(　)

A. 各项系数之和为 1　　　　B. 各项系数的绝对值之和为2^{12}

C. 不存在常数项　　　　D. x^3的系数为 40

【答案】BD

【解析】

【分析】

本题考查二项式定理和二项展开式的特定项与特定项的系数，考查推理能力和计算能力，属于中档题.

利用二项式定理和二项式展开式的通项公式逐个判断即可.

【解答】

解：令$x=1$可得各项系数和为2^6，故A错误；

各项系数绝对值之和为2^{12}，故B正确；

$(1+\frac{2}{x}-x)^6$一定存在常数项，故C错误；

$(1+\frac{2}{x}-x)^6$展开式的通项公式中，含有x^3的系数为：$C_6^3(-x)^3\cdot C_3^3(1)^3+C_6^4(-x)^4\cdot C_2^1\left(\frac{2}{x}\right)\cdot C_1^1(1)=$

$(-20+60)x^3=40x^3$．

故x^3的系数是 40，故D正确．

故选BD．

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 若$(1-4x)^{2017}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2017}x^{2017}$，则$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2017}}{2^{2017}}$的值是_________．

【答案】-2

【解析】

【分析】

本题主要考查二项式定理的应用，属于基础题．

令$x=0$，求出a_0，令$x=\frac{1}{2}$，求出$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2017}}{2^{2017}}$，

两式作差即可．

【解答】

解：令$x=0$，得$a_0=1$，

令$x=\frac{1}{2}$，得$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2017}}{2^{2017}}=(-1)^{2017}=-1$，

则$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2017}}{2^{2017}}=-1-1=-2$．

10. 春节文艺汇演中需要将A,B,C,D,E,F六个节目进行排序，若A,B两个节目必须相邻，且都不能排在 3 号位置，则不同的排序方式有______种.(用数字作答)

【参考答案】 144

【试题解析】 解：使用捆绑法，将AB捆绑，先确定AB的位置，再将剩余的节目进行排序，

故有$3A_2^2A_4^4=144$种，

故答案为：144．

相邻问题利用捆绑法，将AB捆绑，先确定AB的位置，再将剩余的节目进行排序，问题得以解决．

本题考查了排列数的应用，掌握捆绑法，属于基础题．

11. 若复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_2|=3$，$|z_1+z_2|=3\sqrt{2}$，则$|2z_1-z_2|$的值是 ________．

【参考答案】 $3\sqrt{5}$

【试题解析】

【分析】

本题考查了复数的模和复数的四则运算，属于中档题．

设$z_1=a+bi(a,b\in R)$，$z_2=c+di(c,d\in R)$，由向量的模运算可得结果．

【解答】

解：设$z_1=a+bi(a,b\in R)$，$z_2=c+di(c,d\in R)$，

$\because|z_1|=|z_2|=3$，$\therefore a^2+b^2=c^2+d^2=9$，

$\because|z_1+z_2|=3\sqrt{2}$，$\therefore\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=3\sqrt{2}$，

$\therefore a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=18$，

$\therefore 18+2(ac+bd)=18$，$\therefore ac+bd=0$，

$\therefore |2z_1-z_2|=\sqrt{2(a+bi)-(c+di)}=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}$

$=\sqrt{4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

故答案为$3\sqrt{5}$.

四、解答题（本大题共 3 小题）

12. 已知虚数$z=a+bi(a,b\in R,b\neq 0)$满足$z+\frac{2}{z}\in \mathbf{R}$.

(1) 求$|z|$ (2) 若$a(z-\frac{2}{z})=i$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值.

【参考答案】

解：(1) 依题意$z+\frac{2}{z}=a+bi+\frac{2}{a+bi}=a+bi+\frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$

$=a+bi+\frac{2a-2bi}{a^2+b^2}=a+\frac{2a}{a^2+b^2}+\left(b-\frac{2b}{a^2+b^2}\right)i\in R$，

所以$b-\frac{2b}{a^2+b^2}=0\Rightarrow a^2+b^2=2$，所以$|z|=\sqrt{2}$;

(2) 依题意$a\left(z-\frac{2}{z}\right)=i$，即$a\left(a+bi-\frac{2}{a+bi}\right)=a\left[a+bi-\frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\right]$

$=a\left[a+bi-\frac{2a-2bi}{a^2+b^2}\right]=a\left[a-\frac{2a}{a^2+b^2}+\left(b+\frac{2b}{a^2+b^2}\right)i\right]$

$=a^2-\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\left(ab+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)i$

$=a^2-a^2+(ab+ab)i=2abi=i$，

所以$2ab=1, ab=\frac{1}{2}$，

由$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ ab=\frac{1}{2} \end{cases}$ 得$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=2+1=3$，

所以$a+b=\pm\sqrt{3}$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{\pm\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=\pm 2\sqrt{3}$.

【试题解析】 本题主要考查复数的概念、运算，相等的条件等，考查计算能力，属中档题.

(1) 依题意$z+\frac{2}{z}=a+bi+\frac{2}{a+bi}=a+\frac{2a}{a^2+b^2}+(b-\frac{2b}{a^2+b^2})i\in R$，所以$b-\frac{2b}{a^2+b^2}=0\Rightarrow a^2+b^2=2$，求出$|z|=\sqrt{2}$;

(2) 由$a\left(z-\frac{2}{z}\right)=i$得，$a^2-a^2+(ab+ab)i=2abi=i$，所以$2ab=1, ab=\frac{1}{2}$，由$\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ ab=\frac{1}{2} \end{cases}$，所以$a+b=\pm\sqrt{3}$，

确定$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值.

13. 已知在$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$的展开式中第 6 项为常数项.

(1)求展开式中所有项的二项式系数和;

(2)求展开式中所有项的系数和；

(3)求展开式中所有的有理项．

【答案】解：(1)因为在$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$的展开式中第 6 项为常数项，

所以$C_n^5(\sqrt[3]{x})^{n-5}(-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^5=-\frac{1}{2^5}C_n^5x^{\frac{n-10}{3}}$为常数项，所以$n=10$，

所以展开式中所有项的二项式系数和为2^{10}；

(2)令$x=1$，得到展开式中所有项的系数和为$\frac{1}{2^{10}}$；

(3)展开式中通项为$(-\frac{1}{2})^rC_{10}^rx^{\frac{10-2r}{3}}$，

令$\frac{10-2r}{3}$为整数，$0\leqslant r\leqslant 10$，得到$r=2$，5，8，

$r=2$时，$(-\frac{1}{2})^2C_{10}^2x^{\frac{10-2\times2}{3}}=\frac{45}{4}x^2$；

$r=5$时，$(-\frac{1}{2})^5C_{10}^5x^{\frac{10-2\times5}{3}}=-\frac{63}{8}$；

$r=8$时，$(-\frac{1}{2})^8C_{10}^8x^{\frac{10-2\times8}{3}}=\frac{45}{256}x^{-2}$；

所以展开式中所有的有理项有$\frac{45}{4}x^2$，$-\frac{63}{8}$，$\frac{45}{256}x^{-2}$．

【解析】本题主要考查二项式的知识，解答本题的关键是知道二项式展开式的特点，属于中档题．

(1)因为在$(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$的展开式中第 6 项为常数项，即可求得 n，求展开式中所有项的二项式系数和即可；

(2)令$x=1$，得到展开式中所有项的系数和为$\frac{1}{2^{10}}$；

(3)展开式中通项为$(-\frac{1}{2})^rC_{10}^rx^{\frac{10-2r}{3}}$，令$\frac{10-2r}{3}$为整数，求出 r 的值，从而可得求展开式中所有的有理项．

14. 已知函数$f(x)=ae^x+2xe^{-x}(a\in R)$．

(Ⅰ)若$x=1$为$f(x)$的极值点，求$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)当$x>0$时，$f(x)<4a+1$，求a的取值范围．

【参考答案】

解：(Ⅰ)对函数求导可得$f'(x)=ae^x+2e^{-x}(1-x)$，

由$f'(1)=0$，得$a=0$，

所以$f'(x)=2e^{-x}(1-x)$，

故当$x<1$时，$f'(x)>0$；当$x>1$时，$f'(x)<0$，

所以函数$f(x)$在$(-\infty,1)$上递增，在$(1,+\infty)$上递减；

(Ⅱ)$f(x)<4a+1$，等价于$ae^{2x}-(4a+1)e^x+2x<0$

令$g(x)=ae^{2x}-(4a+1)e^x+2x, x>0, \therefore g(x)_{\max}<0$，

则$g'(x)=(e^x-2)(2ae^x-1)$，

①当$a\leqslant 0$时，因为$2ae^x-1<0$，

所以当$0<x<\ln 2$时，$g'(x)>0$;当$x>\ln 2$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)_{\max}=2\ln2-4a-2$

故只需$2\ln 2-4a-2<0$，得$\frac{\ln 2-1}{2}<a\leqslant 0$，

②当 $a>0$ 时，取 x_0 使得 $ae^{x_0}-(4a+1)=0$，

则 $x_0=\ln\dfrac{4a+1}{a}>0$，且 $g(x_0)=ae^{2x_0}-(4a+1)e^{x_0}+2x_0=2x_0>0$ 故不符合题意，

综合得 a 的取值范围为 $\dfrac{\ln 2-1}{2}<a\leqslant 0$.

【试题解析】

本题考查利用导数求函数的单调性、极值和最值，考查导数中的恒成立问题，考查学生分析解决问题的能力，属于较难题.

(Ⅰ)由 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，可得 $f'(1)=0$，进而可得 $a=0$，求得导函数，进而可由导函数的符号与函数单调性的关系，可得函数 $f(x)$ 的单调性；

(Ⅱ)$f(x)<4a+1$ 化为 $ae^{2x}-(4a+1)e^{x}+2x<0$，构造函数 $g(x)=ae^{2x}-(4a+1)e^{x}+2x$，利用导数研究 $g(x)$ 的单调性，求出其最小值，由最小值小于 0，分类求出 a 的范围即可.