

# 利用构造思想解导数综合题的五个意识

浙江省杭州外国语学校 (310023) 张传鹏

高中数学新课标中要求教师在教学中要提升学生的数学学科核心素养,即引导学生能够能从数学的角度看问题,有条理地进行理性思维、严密求证、逻辑推理和清晰准确地表达的意识与能力.学生在数学学习过程中进行感悟思想、经验积累,通过思考内化为自己的东西,所养成的自己独有的思考和表达问题的一种习惯,就是数学核心素养.本文结合导数章节的教学,谈如何利用构造思想去解导数综合题,在知识解决的同时,如何落实高中数学学科核心素养,从而实现了从关注知识本身到关注学生思维方式的转变,最终达到学科育人.

## 一、常规多次构造函数意识

**例1** 已知函数  $f(x) = \frac{(x-a)^2}{\ln x}$  (其中  $a$  为常数),当  $0 < a < 1$  时,设函数  $f(x)$  的3个极值点为  $x_1, x_2, x_3$ ,且  $x_1 < x_2 < x_3$ . 求证:  $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ .

**解:**由题意知  $f'(x) = \frac{(x-a)(2\ln x + \frac{a}{x} - 1)}{\ln^2 x}$ ,

令  $h(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} - 1$ ,则有  $h'(x) = \frac{2x-a}{x^2}$ ,∴ 函数

$h(x)$  在  $(0, \frac{a}{2})$  上单调递减,在  $(\frac{a}{2}, +\infty)$  上单调递

增.∴ 函数  $f(x)$  有3个极值点  $x_1 < x_2 < x_3$ ,从而

$h_{\min}(x) = h(\frac{a}{2}) = 2\ln \frac{a}{2} + 1 < 0$ ,所以  $a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ ,而已

知  $0 < a < 1$ ,满足  $a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ .

当  $0 < a < 1$  时,  $h(a) = 2\ln a < 0$ ,  $h(1) = a - 1 < 0$ ,∴ 函数  $f(x)$  的递增区间有  $(x_1, a)$  和  $(x_3, +\infty)$ ,递减区间有  $(0, x_1)$ ,  $(a, 1)$ ,  $(1, x_3)$ ,此时,函数  $f(x)$  有3个极值点,且  $x_2 = a$ . ∴ 当  $0 < a < 1$  时,  $x_1, x_3$  是

函数  $h(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} - 1$  的两个零点,即有

$$\begin{cases} 2\ln x_1 + \frac{a}{x_1} - 1 = 0, \\ 2\ln x_3 + \frac{a}{x_3} - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{则消去 } a \text{ 有 } 2x_1 \ln x_1 - x_1 = 2x_3 \ln x_3 - x_3,$$

令  $g(x) = 2x \ln x - x$ ,则  $g'(x) = 2\ln x + 1$  有零点  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,且  $\frac{1}{\sqrt{e}} < x_3$ .

∴ 函数  $g(x) = 2x \ln x - x$  在  $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$  上递减,在  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$  上递增. 要证明  $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}} - x_1$

$\Leftrightarrow g(x_3) > g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1)$ . ∵  $g(x_1) = g(x_3)$ , ∴ 即证

$g(x_1) > g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1) \Leftrightarrow g(x_1) - g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1) > 0$ ,构造

函数  $F(x) = g(x) - g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x)$ , ∴  $F(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0$ , ∴ 只需

要证明  $F$  在  $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$  上单调递减即可. 而  $F'(x) =$

$$2\ln x + 2\ln(\frac{2}{\sqrt{e}} - x) + 2, F''(x) = \frac{2(\frac{2}{\sqrt{e}} - 2x)}{x(\frac{2}{\sqrt{e}} - x)^2} > 0,$$

∴  $F'(x)$  在  $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$  上单调递增, ∴  $F'(x) < F'(\frac{1}{\sqrt{e}}) =$

$0$ , ∴ 当  $0 < a < 1$  时,  $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ .

**评注:**导数是研究函数性质的一个重要工具,在解决不等式证明等问题时,通常需要构造函数,有时候甚至需要多次构造函数.要清楚多次构造函数的目的是什么,不要盲目的进行多次构造.

## 二、构造利用导数几何意义的意识

例1的求解主要是构造辅助函数证明不等式.

易得函数  $g'(x) = 2\ln x + 1$  且有零点  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,满足  $x_1$

$< \frac{1}{\sqrt{e}} < x_3$ ,构造辅助函数  $F(x) = g(x) - g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x)$ ,

由  $F(x)$  导数的性质得到了函数  $F(x)$  在  $(0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$  上

单调递减,从而  $F(x) > 0$  恒成立,从而证明  $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$ . 本题亦可不构造函数  $F(x)$ ,具体解法如下:

**解法2:**令  $m(x) = g'(x) = 2\ln x + 1$ ,则  $m'(x) = \frac{2}{x} > 0$ ,所以  $m(x)$  是递增函数,又因为  $m'(x) = \frac{2}{x}$  的

函数值是逐步减小的,所以函数  $m(x)$  的增长速度是逐渐变小的,即函数  $g(x)$  图像切线的斜率增长速度是逐渐变小的,体现在图像上为:

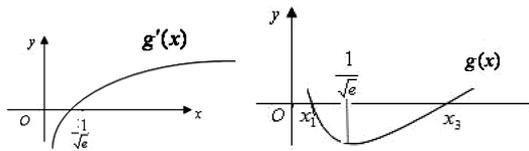


图 1

图 2

观察函数  $g'(x)$  和  $g(x)$  图像,  $g'(x) = 2\ln x + 1$

有零点  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 且  $x_1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < x_3$ , 当  $g(x)$  在  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

左右两侧变化率一样时有  $x_1 + x_3 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ , 本题中  $x =$

$\frac{1}{\sqrt{e}}$  左边下降的速率要快于右边上升的速率, 所以  $x_1$

$+ x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}}$  成立.

### 三、构造函数解决不等式证明问题的意识

**例 2** 设函数  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $g(x) = xf'(x)$ ,  $x \geq 0$ , 其中  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数.

(1) 若  $f(x) \geq ag(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 设  $n \in \mathbf{N}^+$ , 比较  $g(1) + g(2) + \dots + g(n)$  与  $n - f(n)$  的大小, 并加以证明.

**解:** (1) 由题设得  $g(x) = \frac{x}{1+x}$  ( $x \geq 0$ ), 已知

$f(x) \geq ag(x)$  恒成立, 即  $\ln(1+x) \geq \frac{ax}{1+x}$  恒成立. 设

$\varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{ax}{1+x}$  ( $x \geq 0$ ), 则  $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} -$

$\frac{ax}{(1+x)^2} = \frac{x+1-a}{(1+x)^2}$ , 当  $a \leq 1$  时,  $\varphi'(x) \geq 0$  (当且仅

当  $x=0, a=1$  时等号成立),  $\therefore \varphi(x)$  在  $[0, +\infty)$  上

单调递增. 又  $\varphi(0) = 0$ ,  $\therefore \varphi(x) \geq 0$  在  $[0, +\infty)$  上

恒成立,  $\therefore$  当  $a \leq 1$  时,  $\ln(1+x) \geq \frac{ax}{1+x}$  恒成立 (当且

仅当  $x=0$  时等号成立). 当  $a > 1$  时, 对  $x \in (0, a-1]$ , 有  $\varphi'(x) \leq 0$ ,  $\therefore \varphi(x)$  在  $x \in (0, a-1]$  上单调递

减,  $\therefore \varphi(a-1) < \varphi(0) = 0$ , 即当  $a > 1$  时, 存在  $x >$

$0$ , 使  $\varphi(x) < 0$ ,  $\therefore \ln(1+x) \geq \frac{ax}{1+x}$  不恒成立. 综上可知,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

(2) 由题设知  $g(1) + g(2) + \dots + g(n) = \frac{1}{2} +$

$\frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}$ ,  $n - f(n) = n - \ln(n+1)$ , 比较结果

为  $g(1) + g(2) + \dots + g(n) > n - \ln(n+1)$ , 此不等

式等价于  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1)$ , 证明如下:

在 (1) 中取  $a=1$ , 可得  $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ ,  $x > 0$ ,

令  $x = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$ , 则  $\ln \frac{1+n}{n} > \frac{1}{1+n}$ . 故有  $\ln 2 - \ln 1 > \frac{1}{2}$ ,  $\ln 3 - \ln 2 > \frac{1}{3}, \dots, \ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n+1}$ , 上述各式相加可得  $\ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$ . 结论得证.

**评注:** 在本例中, 由 (1) 知当  $a \leq 1$  时, 有  $\ln(1+x) \geq \frac{ax}{1+x}$  恒成立, 从而令  $a=1$ , 可得  $\ln(1+x) \geq$

$\frac{x}{1+x}$  恒成立, 再结合第 (2) 小题所需要证明的不等

式, 令  $x = \frac{1}{n}$  得到  $\ln \frac{1+n}{n} > \frac{1}{1+n}$ , 后面依次迭代, 裂项求和, 从而得到要证的不等式.

### 四、构造零点设而不求的意识

**例 3** 已知函数  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ , 若不等式  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的范围.

**解:**  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ ,  $\therefore f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$ , 由  $f'(x_0) = 0$  得  $ae^{x_0-1} = \frac{1}{x_0}$ , 即  $\ln a + x_0 - 1 =$

$-\ln x_0$ . 易知  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极小值 (也是最小值), 由  $f(x_0) \geq 1$ , 得  $ae^{x_0-1} - \ln x_0 + \ln a \geq 1, \frac{1}{x_0} + \ln a$

$+ x_0 - 1 + \ln a \geq 1$ , 整理得  $2\ln a \geq 2 - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$  恒成立,  $\therefore \ln a \geq 0$ , 解得  $a \geq 1$ .

**评注:** 在一些涉及到指数函数、对数函数的问题时, 若要求函数的极值点时需要解一些超越方程, 但有时是无法解出这些方程的解, 此时可以巧妙的借用方程的等价条件, 采用设而不求的策略, 使得问题得到解决.

### 五、逆向分析的构造意识

解决函数单调性问题时, 有时需要借助构造新函数, 结合函数的导数与函数单调性之间的关系来解决, 那么怎样合理的构造新函数就是问题的关键. 在解题过程学会如何进行分析与思考, 如何从题目要解决的结论出发, 通过逆向分析, 结合题目已知条件, 找到破解问题的思路.

**例 4** 设  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, 1]$ , 试求函数  $f(x, y) = (2y-1)\sin x + (1-y)\sin[(1-y)x]$  的最小值.

**解:** 首先, 当  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, 1]$  时,  $f(x, y) = (2y-1)\sin x + (1-y)\sin(1-y)x$

$= (1-y)^2 x \left( \frac{\sin[(1-y)x]}{(1-y)x} + \frac{2y-1}{(1-y)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$

$= (1-y)^2 x \left( \frac{\sin[(1-y)x]}{(1-y)x} + \frac{y^2 - (1-y)^2}{(1-y)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$

$= (1-y)^2 x \left( \frac{\sin[(1-y)x]}{(1-y)x} - \frac{\sin x}{x} + \frac{y^2}{(1-y)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$ ,

令  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $g'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$  ( $x \neq \frac{\pi}{2}$ ), 当

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时, 因为  $\cos x > 0$ ,  $\tan x > x$ , 所以  $g'(x) <$

$0$ ; 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时, 因为  $\cos x < 0$ ,  $\tan x < 0$ ,  $x - \tan x$

$> 0$ , 所以  $g'(x) < 0$ ; 又因为  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上连续,

所以  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减.

又因为  $0 < (1-y)x < x < \pi$ , 所以  $g(1-y)x >$

$g(x)$ , 即  $\frac{\sin(1-y)x}{(1-y)x} - \frac{\sin x}{x} > 0$ , 又因为  $\frac{y^2}{(1-y)^2} \cdot$

$\frac{\sin x}{x} > 0$ , 所以当  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, 1]$  时,  $f(x, y) >$

$0$ . 其次, 当  $x=0$  时,  $f(x, y) = 0$ ; 当  $y=0$  时,  $f(x, y)$

$= 0$ ; 当  $x=\pi$  时,  $f(x, y) = (1-y)\sin(1-y)\pi \geq 0$ ,

此时若  $y=1$ , 则  $f(x, y) = -\sin x + \sin x = 0$ . 综上所述,

当且仅当  $x=0$  或  $y=0$  或  $x=\pi$  且  $y=1$  时,

$f(x, y) = 0$  取到最小值  $0$ .

总之, 在学习导数章节时, 应关注以上五个意识.

其中意识一: 多次构造函数的意识, 还是强调数学知识本身, 因为导数知识最大的作用就是其在解决问题中的工具性, 主要体现在利用导数研究函数的性质, 前提条件就是构造恰当的函数. 意识二: 利用导数的几何意义的思想, 导数值就是函数图像切线的斜率, 如果再去研究切线斜率的单调性, 即是去研究导函数的导数值的正负, 其本质上就是研究函数的凹凸性. 意识三: 构造函数解决不等式问题的意识, 则侧重于强调知识的应用性, 利用导数求解出函数的最值, 从中提炼出不等式并进行应用. 意识四: 构造零点设而不求的意识, 是直面超越方程不能求解的问题, 充分利用方程的等价条件解决问题. 意识五: 逆向分析的构造意识, 是由题目要解决的结论出发, 寻找结论与已知的联系. 强调以导数知识为载体, 对人的思维方式产生的影响, 这就是我们所说的学科育人. 可以发现, 本文中强调的五个意识之间是相辅相成、层层递进的关系, 其过程是从知识本身到知识的升华、知识的应用, 最后达到学科育人的目的.

## 数学解题教学要“三悟”

福建省古田县第一中学 (352200) 兰诗全

解题教学是数学教学的重要组成部分, 师生要在解题思维互动生成中有感悟、品悟、领悟. 感悟出知识的来龙去脉, 品悟出解题中的具体方法和规律, 领悟出其中蕴涵的数学本质与思想, 在悟中让课堂充满思辨, 在悟中让知识得以延伸, 在悟中揭示问题本质让数学思想得到升华. 通过解题反思, 要能悟出智慧, 悟出真理, 这是解题教学的核心与关键.

### 1 悟错因

在数学教学过程中, 经常会发现学生在解题中犯下各种各样的错误, 事后师生都在努力纠错, 教师讲得累, 学生纠得苦, 可是效果却不明显, 到下次解题时又重复“昨天的故事”. 为什么呢? 一大关键是学生没有深层次地找到错误的真正原因, 没有一个与错误作“斗争”的过程, 对错误原因没有追根溯源, 没有揭示问题的本质, 一错再错成必然.

例1 若  $a \geq 0, b \geq 0$ , 且当  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  时, 恒有  $ax$

$+ by \leq 1$ , 求以  $a, b$  为坐标的点  $P(a, b)$  所形成平面区域的面

积. **解法1:** 画出不等式组  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{cases}$  对应的平面区

域(图略). 由题意得, 对该区域内的任意点  $(x, y)$ , 不等式  $ax + by \leq 1$  恒成立, 即该区域恒在直线  $ax +$

$$\frac{1}{a} \geq 1,$$

$by = 1$  的下方, 所以  $\begin{cases} \frac{1}{a} \geq 1, \\ \frac{1}{b} \geq 1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ 0 \leq b \leq 1, \end{cases}$  从而以  $a, b$

$$a \geq 0,$$

$$b \geq 0,$$

为坐标的点  $P(a, b)$  所形成的平面区域是一个正方形, 其面积为  $1$ .

**解法2:** 设  $\vec{m} = (a, b)$ ,  $\vec{n} = (x, y)$ , 向量  $\vec{m}$  与  $\vec{n}$  的夹角为  $\theta$ , 由  $a \geq 0, b \geq 0$ , 且  $x \geq 0, y \geq 0$ , 得  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 不等式  $ax + by \leq 1$  恒成立等价于  $\vec{m} \cdot \vec{n} = ax + by = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \theta \leq 1$  恒成立, 当  $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$  或  $\cos \theta = 0$  时, 上式显然成立. 当  $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$  且  $\cos \theta \neq 0$  时, 可得  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \theta}$  恒成