

清北学堂2020年强基计划物理学科测试模拟题

考试时间: 180 分钟

本答案有 5 页, 8 个问题。总分 100 分。请检查是否有缺页, 并在答题纸每一页的顶部写上你的姓名, 以防页面分离。本次考试可以携带不具备存储功能的计算器。请将答案写在答题纸上。

一、(10 分) 如图1所示, 半径为 R 圆盘固定在地面上, 沿圆盘边缘放有一条质量线密度为 λ 、长度为 $2\pi R$ 的匀质细软绳。圆盘盘面是粗糙的, 滑动摩擦因数与静摩擦因数同为 μ , 在其外边缘设置有一圈光滑挡板 (以保证绳子不会离开圆盘)。初始时绳子首位相接, 记绳子一端为 A 、另一端为 B 。现用大小恒定为 $F = \alpha \cdot 2\pi\lambda Rg$ 方向始终沿圆周切向的力推 A 端, 其中 α 为给定常数且 $0 < \alpha < \mu$ 。绳子从 A 端开始运动, 逐渐堆在一起并推动前方静止的绳子运动, 最终静止。已知 A 端从开始运动到最终静止相对圆盘总共转动了角度 θ 。重力加速度为 g 。求:

- (1) (4 分) 整根绳子的质心 C 从 A 端开始运动到最终静止运动的总路程 s 。
- (2) (6 分) A 端从开始运动到最终静止经过的总时间 T 。

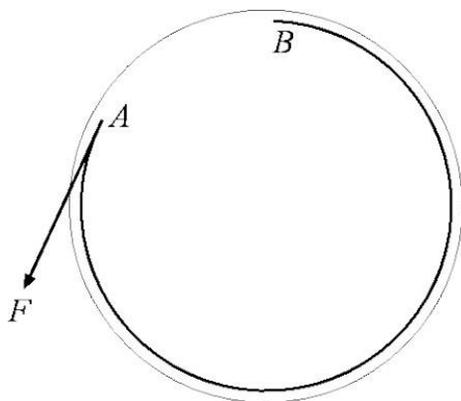


图 1

二、(10 分) 空间中有磁场 $B(t) = B_0[(1 + \omega t)\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z]$, 且磁场区域是以 x 轴为轴线的足够大的圆柱形. 12 根电阻为 R 、长度为 a 导线杆连成一个刚性正方体 $abcd-efgh$ 。其初始时位置如图2所示, 中心位于原点. 现使立方体绕 x 轴以角速度 ω 逆时针转动。求为使正方体匀速旋转所需施加的合外力 $F(t)$ 和合外力矩 $M(t)$ 。

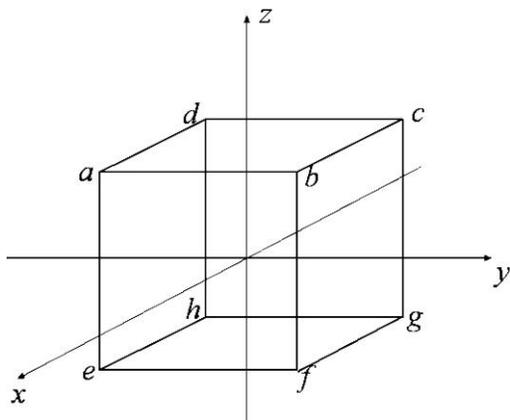


图 2

三、(15 分) 2020 年, 人类启动流浪太阳计划, 决定利用质子的二维展开紧密包裹半个太阳, 使得这半个表面上不能发出任何的辐射, 另外半个表面则视为黑体。然后人类利用尖端科技制成的火柴点燃太阳, 将太阳表面提升到极高的温度 T , 并保持恒定。此时太阳会由于各向异性辐射的缘故开始加速。初态在本征系中太阳质量为 m_0 , 半径为 r 。假设其在本征系中体积、形状不变, 并且可以持续不断地辐射下去。已知光速为 c , 斯忒潘常数为 σ , 记初态和太阳相对静止的参考系为 S 。试求解在太阳参考系中经过了时间 τ 后, 太阳相对 S 系的速度大小。

四、(15 分) 家用的榨汁机可以简化为下面的模型: 半径分别为 $R_1, R_2 (R_2 > R_1)$ 的长圆柱形薄壁筒同轴放置, 两筒间充满了密度为 ρ 的均匀液体, 现使内筒以恒定的角速度 ω_0 绕轴旋转, 而外筒静止, 由于液体的粘滞性, 与内筒接触的液体随内筒一起旋转, 而与外筒接触的液体与外筒一样静止, 稳定时, 液体形成稳定的层流结构。设液体的粘度为 η , 密度 ρ 不变, 不计重力已知在柱坐标下, 各流层间的粘滞应力可表示为:

(1)

$$F_\theta(r) = \frac{df}{dS} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{dv_r}{d\theta} + \frac{dv_\theta}{d\theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

(1) (5 分) 试求流体绕轴旋转角速度 ω 随 r 的分布函数。

(2) (5 分) 已知流体中 $r = R_1$ 处的压强为 P_0 , 试求流体的压强 P 随 r 的分布函数。

- (3) (5 分) 试求此流体在柱坐标下的径向粘滞应力。径向粘滞应力定义为：在半径为 r 处，通过转角为 θ 的径向界面，较大侧的液体施于 θ 较小侧液体的径向（沿半径向外方向为正方向）粘滞应力。

- 五、(10 分) 如图3所示，用半径为 R ，高度为 H 的圆柱形杯子做覆杯试验，杯内为装满水，用质量为 m 的刚性板盖在杯口上，翻转杯子后放开板，由于水的重力作用，板会略微下降，但如果杯内的空气层厚度 h 较小的话，则因杯口内外的压强差，会在杯口和板之间形成一向内凹的薄水层，使杯内的水仍留在杯内，设水对板和玻璃均是完全浸润，水的密度为 ρ ，表面张力系数为 σ ，大气压强为 P_0 ，试求 h 的最大值。

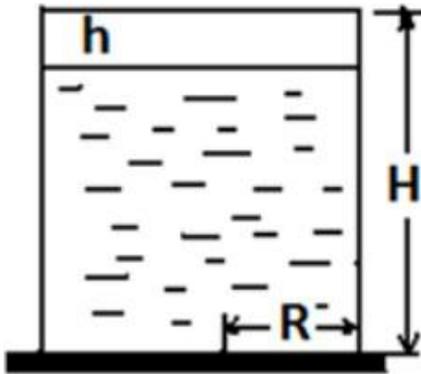


图 3

- 六、(10 分) 考虑一个形状为旋转抛物面方程为 $r^2 = 2p\xi$ 的理想光滑镜面，在其焦点处放置一个点光源，可以产生相干光，产生干涉条纹，如图4所示焦点到屏幕的距离为 z ，且考虑傍轴情况。
- (1) (4 分) 试求干涉加强极大处的亮纹的方程，说明形状。
 - (2) (6 分) 假设没有镜面时在距离光源 R 处光的振幅为 A_0 。试求屏幕上光强分布。光强常数可以不管。

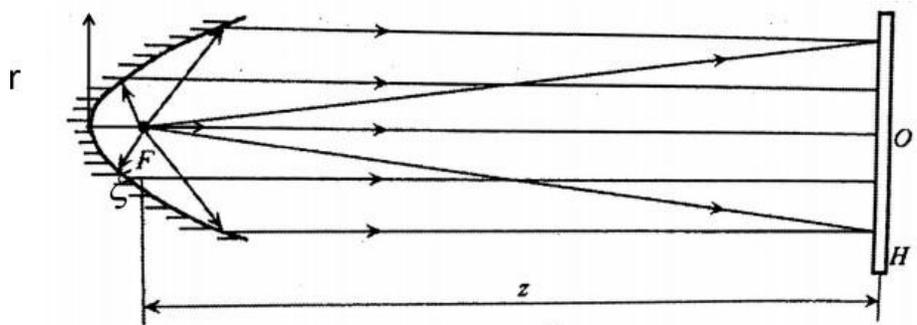


图 4

七、(15分) 现有一质量为 M ，半径为 R 的匀质实心球，在两根相距为 H 的导轨上纯滚。正值处于京津冀雾霾高峰期，空间中弥漫了密度为 ρ 的可视为静止的稀薄的霾，即 $\rho \ll \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 霾与球间的相互作用如下：靠近球的霾会被球带动迅速达共速后脱离球，即不产生在球上的质量积累，且球后方的霾会迅速得到补充但不考虑其与球的相互作用，即只有前方的霾会被带动。

(1) (5分) 导轨为与地成 α 的直轨，问球下滚可达到的稳定速度。

(2) (10分) 与上一问相同的导轨球自某一点静止释放求球下移 L 的用时。

$$\left(\text{当 } x \ll 1 \text{ 时, } \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3\right)$$

八、(15分) 将一个相对介电常数为 ϵ_r 的电介质小球放在均匀电场 E_0 中，电介质小球表面会产生极化电荷面密度 $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ ，其中 θ 指的是我们所考察位置与小球球心连线与外电场方向间的夹角，这样一个面电荷分布会产生一个与外加电场强度相反的匀强退极化场 $E' = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$ ，故电介质小球的内部也是一个匀强场

(1) (7分)

(a) (2分) 求出 σ_0 。

(b) (2分) 我们知道，一个半径为 r 的电介质小球可以等效为一个电偶极子，它的电偶极矩有多大？

(c) (3分) 这个电介质小球的能量是多少？

-
- (2) (8 分) 现在空间中有一半径为 R 的球形空腔, 里面充满固定的电荷, 有一电荷密度分布 $\rho(r)$, 使得空腔中的电场强度是球对称发散的, 大小只与与球心距离有关, 且满足 $E(r) = A\sqrt{r}$ 。在这样的空腔中充满非常微小的灰尘颗粒, 颗粒数量共 N 个, 每个灰尘颗粒可以被视为半径为 a ($a \ll R$) 相对介电常数为 ϵ_r 的小球, 这些小球不会与空腔中的固定电荷发生相互作用, 只是会受到他们产生电场强度的影响。
- (a) (3 分) 求出 $\rho(r)$ 。
- (b) (5 分) 假设温度为 T , 小球之间不会相互作用, 求颗粒的分布 $n(r)$ 。